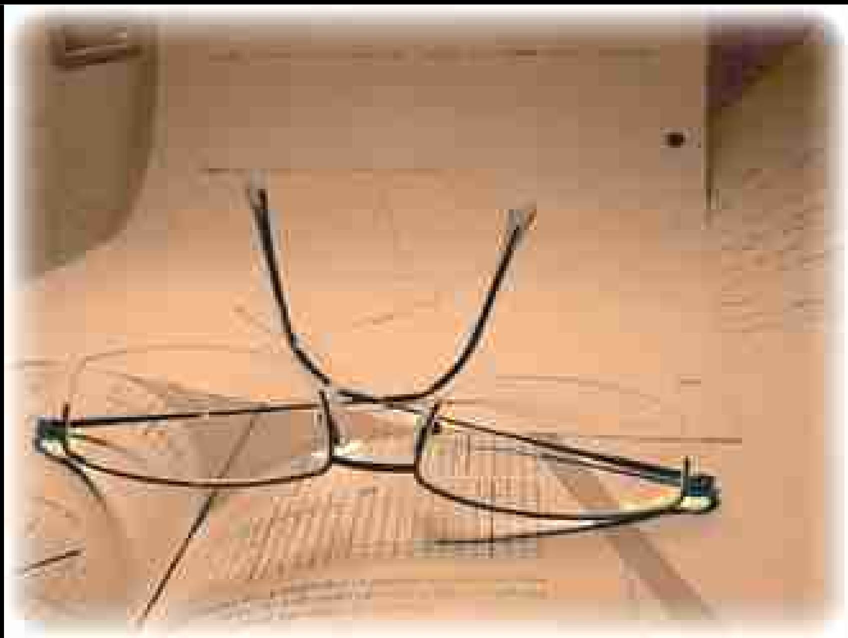
PROVES PAU matemàtiques

2010-2016



Títol: Paràbola convexa
Autor: Francisco Javier Perez Padilla

Material recollit per www.mat3.cat
Maite Gorriz i Santi Vilches

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2016

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Siguin la recta r: $(x, y, z) = (5 + k, k, -2 - 2k)$ i els punts $P = (1, 0, -1)$ i $Q = (2, 1, 1)$.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt Q i és perpendicular al pla determinat per la recta r i el punt P.

[1 punt]

b) Calculeu el punt de la recta r que equidista dels punts P i Q.

[1 punt]

2. Tres nombres, x, y i z, compleixen dues condicions: que el primer és la suma dels altres dos, i que el segon és la suma de la meitat del primer i el doble del tercer.

a) Comproveu que el càlcul dels tres nombres, x, y i z, té una infinitat de solucions.

[1 punt]

b) Trobeu una expressió general de les solucions.

[1 punt]

3. Volem fer un envàs de gelat amb forma de prisma regular de base quadrada i amb una capacitat de 80 cm^3. Per a elaborar-ne la tapa i la superfície lateral, farem servir un material determinat que costa 1 €/cm^2, però per a la base haurem d'utilitzar un material que és un 50 % més car.

a) Si x és la mesura, en cm, del costat de la base, comproveu que la funció que determina el preu de l'envàs és $P(x) = 2{,}5x^2 + \dfrac{320}{x}$.

[1 punt]

b) Calculeu les mides que ha de tenir l'envàs perquè el preu sigui el mínim possible.

[1 punt]

4. Sigui la funció $f(x) = \sin(x)$.

a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la funció f en els punts d'abscissa $x = 0$ i $x = \pi$, respectivament. Trobeu les coordenades del punt en què es tallen les dues rectes.
[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció f i les rectes tangents de l'apartat anterior (en cas de no haver resolt l'apartat anterior, suposeu que les rectes són $y = x$ i $y = -x + \pi$, respectivament).
[1 punt]

5. Responeu a les qüestions següents:

a) Trobeu l'única matriu de la forma $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ que satisfà que $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, i comproveu que $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$ no són invertibles.
[1 punt]

b) Justifiqueu raonadament que si $\boldsymbol{A}$ és una matriu quadrada d'ordre n diferent de la matriu nul·la, 0, i de la matriu identitat, $\boldsymbol{I}$, i satisfà la igualtat $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, aleshores les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$ no són invertibles.
[1 punt]

6. Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pel punt de coordenades $(0, 0, 1)$ i és perpendicular als plans $3x + y - z = 1$ i $x + y + 2z = 5$.
[1 punt]

b) Suposeu que un pla π_1 és perpendicular a un segon pla π_2 i que el pla π_2 és a la vegada perpendicular a un tercer pla π_3. Expliqueu raonadament si necessàriament els plans π_1 i π_3 han de ser perpendiculars entre ells.
[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2016

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{aligned} 2x+4y+4z &= 4k-7 \\ 2x-ky &= -1 \\ -2x &= k+1 \end{aligned}\right\}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre real k.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $k=0$.

[1 punt]

2. A $\mathbb{R}^3$, siguin la recta r que té per equació $(x, y, z) = (1+\lambda, \lambda, 1-\lambda)$ i el pla π d'equació $2x - y + z = -2$.

a) Determineu la posició relativa de la recta r i el pla π.

[1 punt]

b) Calculeu la distància entre la recta r i el pla π.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació

$Ax+By+Cz+D=0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

3. Sigui la funció $f(x) = x\,e^{x-1}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x=1$.

[1 punt]

b) Determineu en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent.

[1 punt]

4. Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu totes les matrius de la forma $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ m & -2\end{pmatrix}$ que satisfan la igualtat $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat, $\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

[1 punt]

b) Justifiqueu que si $\boldsymbol{A}$ és una matriu quadrada que compleix la igualtat $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{I}$, aleshores $\boldsymbol{A}$ és invertible, i calculeu l'expressió de $\boldsymbol{A}^{-1}$ en funció de les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{I}$.

[1 punt]

5. Considereu el tetraedre que té per vèrtexs els punts $A=(x,0,1)$, $B=(0,x,1)$, $C=(3,0,0)$ i $D=(0,x,0)$, amb $0<x<3$.

a) Comproveu que el volum del tetraedre és donat per l'expressió $V(x)=\frac{1}{6}(-x^2+3x)$.

[1 punt]

b) Determineu el valor de x que fa que el volum sigui màxim i calculeu aquest volum màxim.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular el volum del tetraedre de vèrtexs A, B, C i D amb l'expressió

$$\frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|.$$

6. Siguin les paràboles $f(x)=x^2+k^2$ i $g(x)=-x^2+9k^2$.

a) Calculeu les abscisses, en funció de k, dels punts d'intersecció entre les dues paràboles.

[1 punt]

b) Calculeu el valor del paràmetre k perquè l'àrea compresa entre les paràboles sigui de 576 unitats quadrades.

[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2016

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Expliqueu raonadament si les afirmacions següents són vertaderes o falses:

a) Si $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, el sistema és compatible determinat i la solució és $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

b) Si $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, el sistema és compatible indeterminat.

[1 punt]

2. Siguin a $\mathbb{R}^3$ el pla π d'equació $x - y + 2z = 2$ i els punts $A = (3, -1, 2)$ i $B = (1, 1, -2)$.

a) Comproveu que els punts A i B són simètrics respecte del pla π.

[1 punt]

b) Si r és la recta dels punts P que té per equació $P = B + \lambda v$, en què λ és un paràmetre real i $v = (1, 1, 0)$, verifiqueu que els punts mitjans dels segments $\overline{AP}$ pertanyen al pla π.

[1 punt]

3. Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu els màxims relatius, els mínims relatius i els punts d'inflexió de la funció $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

[1 punt]

b) Expliqueu raonadament que si $f(x)$ és una funció amb la derivada primera contínua en l'interval $[a, b]$ i satisfà que $f'(a) > 0$ i $f'(b) < 0$, aleshores hi ha, com a mínim, un punt de l'interval (a, b) en què la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en aquest punt és horitzontal.

[1 punt]

4. Sigui $\boldsymbol{A}$ una matriu quadrada d'ordre n que satisfà la igualtat $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat.

a) Justifiqueu que la matriu $\boldsymbol{A}$ és invertible i que $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$.

[1 punt]

b) Calculeu el valor de a que fa que la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ compleixi la igualtat $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{I}$. Calculeu $\boldsymbol{A}^{-1}$ i comproveu que es correspon amb la matriu calculada a partir del resultat de l'apartat anterior.

[1 punt]

5. Siguin les rectes r: $(x, y, z) = (2, 3, -3) + \lambda(1, -1, 0)$ i $s: \dfrac{x-3}{2} = y - 5 = z + 2$.

a) Estudieu si les rectes r i s són paral·leles o perpendiculars.

[1 punt]

b) Determineu la posició relativa de les rectes r i s i calculeu l'equació paramètrica de la recta t que talla perpendicularment la recta r i la recta s.

[1 punt]

6. Sabem que una funció $f(x)$ té per derivada $f'(x) = (x + 1)e^x$ i que $f(0) = 2$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a $y = f(x)$ en el punt de la corba d'abscissa $x = 0$.

[1 punt]

b) Calculeu l'expressió de $f(x)$.

[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2015

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Sigui la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

a) Determineu per a quins valors de a existeix $\boldsymbol{A}^{-1}$.

[1 punt]

b) Calculeu $\boldsymbol{A}^{-1}$ per a $a = 0$.

[1 punt]

2. A l'espai tridimensional considereu la recta r: $(x, y, z) = (3 + 2\alpha, -\alpha, 3 - \alpha)$ i els plans π_1: $x + y + z = -1$ i π_2: $(x, y, z) = (2 + \lambda, 1 - \lambda + \mu, \mu)$.

a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla π_2.

[1 punt]

b) Trobeu els dos punts de la recta r que equidisten dels plans π_1 i π_2.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3. Sigui la funció $f(x) = e^x - x - 2$.

a) Demostreu que la funció f té una arrel (un zero) en l'interval $[0, 2]$.

[1 punt]

b) Comproveu que la funció és monòtona en l'interval $[0, 2]$ i calculeu les coordenades dels punts mínim absolut i màxim absolut de la funció en aquest interval.

[1 punt]

4. Siguin els plans de $\mathbb{R}^3$ π_1: $-y + z = 2$, π_2: $-2x + y + z = 1$ i π_3: $2x - 2z = -1$.

a) Calculeu la posició relativa dels tres plans.

[1 punt]

b) Comproveu que el pla π_3 és paral·lel a la recta definida per la intersecció dels plans π_1 i π_2.

[1 punt]

5. Siguin x i y les mesures dels costats d'un rectangle inscrit en una circumferència de diàmetre 2.

a) Comproveu que la superfície del rectangle, en funció de x, és donada per l'expressió $S(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$.

[1 punt]

b) Calculeu els valors de les mesures x i y per als quals la superfície del rectangle és màxima i calculeu el valor d'aquesta superfície màxima.

[1 punt]

6. Trobeu totes les matrius de la forma $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ que siguin inverses d'elles mateixes, és a dir, que $\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[2 punts]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2015

Matemàtiques

Sèrie 2

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{aligned} -3x + 2y + 3z &= 0 \\ (a-2)y - 3z &= 0 \\ -x - y + (-a-3)z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a el sistema té més d'una solució.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $a = -3$.
[1 punt]

2. Sigui r la recta de l'espai que té per equació $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = z$ i sigui P el punt de coordenades $(6, 0, -1)$.

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pel punt P i talla perpendicularment la recta r.
[1 punt]

b) Trobeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt P i conté la recta r.
[1 punt]

3. Responeu a les qüestions següents:

a) Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $y = x^3$ en el punt d'abscissa $x = 2$.
[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió plana finita limitada per la corba $y = x^3$ i la recta $y = 3x - 2$.
[1 punt]

4. Considereu a $\mathbb{R}^3$ la recta que té per equació r: $(x, y, z) = (-4 + 2\lambda, -2, 1 - \lambda)$ i els plans π_1 i π_2 d'equacions π_1: $x + 2y + 2z = -1$ i π_2: $x - 2y + 2z = -3$, respectivament.

***a*)** Determineu la posició relativa de π_1 i π_2.

[1 punt]

***b*)** Comproveu que tots els punts de la recta r estan situats a la mateixa distància dels plans π_1 i π_2.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació

$Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

5. Responeu a les qüestions següents:

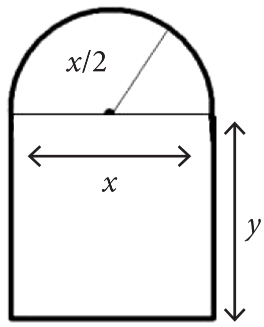
***a*)** Calculeu la matriu de la forma $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que satisfà $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat, $\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

***b*)** Calculeu $\boldsymbol{A}^{-1}$ i comproveu que el resultat es correspon amb el que obteniu de deduir la matriu $\boldsymbol{A}^{-1}$ a partir de la igualtat $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

[1 punt]

6. La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en què x és el diàmetre de la circumferència, és a dir, la distància entre columnes, i y és l'alçària de cada columna.



***a*)** Comproveu que la funció $f(x, y) = \dfrac{\pi x^2}{8} + xy$ determina l'àrea d'aquesta portalada.

[1 punt]

***b*)** Si el perímetre de la portalada fa 20 m, determineu les mides x i y de la portalada que en maximitzen l'àrea.

[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2014

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Siguin r i s les rectes de $\mathbb{R}^3$ que tenen les equacions següents:

$$r: x+5=y-5=\frac{z-3}{2} \quad \text{i} \quad s: \frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}.$$

a) Estudieu el paral·lelisme i la perpendicularitat entre les rectes r i s.
[1 punt]

b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax+By+Cz=D$) del pla π que conté la recta r i és paral·lel a la recta s. Calculeu la distància entre la recta s i el pla π obtingut.
[1 punt]

2. Siguin les funcions $f(x)=\dfrac{e^{ax}+b}{4}$ i $g(x)=+\sqrt{3x+4}$.

a) Determineu el domini i el recorregut de la funció g.
[1 punt]

b) Calculeu per a quins valors de a i de b les gràfiques de les dues funcions són tangents (és a dir, tenen la mateixa recta tangent) en el punt d'abscissa $x=0$.
[1 punt]

3. Considereu el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} mx-y=m \\ 3x+(m-4)y=m+2 \end{cases}$, per a $m\in\mathbb{R}$.

a) Discutiu el sistema d'equacions per als diferents valors del paràmetre m.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema en aquells casos en què el sistema sigui compatible.
[1 punt]

4. Sabem que una funció f té per derivada la funció $f'(x) = (3x - 2)^2\,(x - 2)$.

***a*)** Calculeu els valors de x en què la funció f té un màxim relatiu, un mínim relatiu o un punt d'inflexió, i indiqueu en cada cas de què es tracta.

[1 punt]

***b*)** Determineu la funció f sabent que s'anul·la en el punt d'abscissa $x = 2$.

[1 punt]

5. Donats els vectors $\boldsymbol{u} = (2, -1, 0)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 3, 4)$ i $\boldsymbol{w} = (0, 3a - 1, 4a)$,

***a*)** Calculeu els valors del paràmetre a perquè els vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$ siguin linealment dependents.

[1 punt]

***b*)** Calculeu els valors del paràmetre a perquè un tetraedre d'arestes $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$ tingui un volum de 2/3 d'unitats cúbiques.

[1 punt]

6. Considereu l'equació matricial $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, en què

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

***a*)** Per a quins valors del paràmetre a l'equació matricial té una solució única?

[1 punt]

***b*)** Trobeu la matriu $\boldsymbol{X}$ que satisfà l'equació matricial quan $a = 3$.

[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2014

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu la matriu $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$, per a $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculeu el rang de la matriu $\boldsymbol{M}$ en funció dels valors del paràmetre a.
[1 punt]

b) Discutiu i resoleu el sistema d'equacions lineals

$$\boldsymbol{M} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

segons els valors del paràmetre a.
[1 punt]

2. Considereu el punt $A = (1, 2, 3)$.

a) Calculeu el punt simètric del punt A respecte de la recta d'equació

$$r: (x, y, z) = (3 + \lambda, 1, 3 - \lambda).$$

[1 punt]

b) Calculeu el punt simètric del punt A respecte del pla que té per equació

$$\pi: x + y + z = 3.$$

[1 punt]

3. Un nedador és al mar en un punt N, situat a 3 km d'una platja recta, i just al davant d'un punt S, situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt A, situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt S, de manera que el triangle NSA és rectangle en el vèrtex S. El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h.

a) Si P és un punt entre el punt S i el punt A que està a una distància x de S, demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt N al punt P i caminar des del punt P fins al punt A és determinat per l'expressió $t(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\dfrac{6-x}{5}$.

[1 punt]

b) Calculeu el valor de x que determina el temps mínim que cal per a anar del punt N al punt A, passant per P. Quin és el valor d'aquest temps mínim?

[1 punt]

4. Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques de les funcions $y=x^2$, $y=4x^2$ i $y=9$.

[2 punts]

5. Siguin r i s les rectes de $\mathbb{R}^3$ d'equacions $r\colon \dfrac{x-2}{3}=y=\dfrac{z+1}{4}$ i $s\colon (x,y,z)=(1+2\alpha, 3-\alpha, 4+3\alpha)$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un pla.

[1 punt]

b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax+By+Cz=D$) del pla de l'apartat anterior.

[1 punt]

6. Responeu a les qüestions següents:

a) Demostreu que si $\boldsymbol{A}$ és una matriu quadrada que satisfà la igualtat $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$, on $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat, aleshores $\boldsymbol{A}$ és invertible i $\boldsymbol{A}^{-1}$ satisfà $(\boldsymbol{A}^{-1})^2=\boldsymbol{I}$.

[1 punt]

b) Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ amb $b\neq 0$ que satisfan la igualtat $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$.

[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2014

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$.

a) Calculeu les asímptotes verticals, horitzontals i obliqües de la funció f.
[1 punt]

b) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en aquells punts en què la recta tangent sigui paral·lela a la recta $y=-5x+4$.
[1 punt]

2. Responeu a les qüestions següents:

a) Discutiu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} (k-1)y+(k^2-1)z=0 \\ (4k+1)x-y-7z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

en funció dels valors de k.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per a $k=1$.
[1 punt]

3. Siguin els punts $P=(1, 1, 0)$, $Q=(1, 0, 1)$ i $R=(0, 1, 1)$ i el pla π: $x+y+z=4$.

a) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax+By+Cz=D$) del pla que passa pels punts P, Q i R.
[1 punt]

b) Si S és un punt de π, comproveu que el volum del tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S no depèn del punt S.
[1 punt]

4. Donats els plans π_1: $x - 4y + z = 2m - 1$ i π_2: $2x - (2m + 2)y + 2z = 3m + 1$,

a) Determineu els valors de m perquè els plans π_1 i π_2 s'intersequin en una recta i calculeu un vector director de la recta resultant que no depengui de m.

[1 punt]

b) Sigui el pla π: $3x - 2y + 3z = 8$. Estudieu la posició relativa del pla π amb la recta r definida per la intersecció dels plans π_1 i π_2 quan $m = 1$.

[1 punt]

5. Responeu a les qüestions següents:

a) Si $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ són dues matrius quadrades d'ordre n, demostreu que

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}.$$

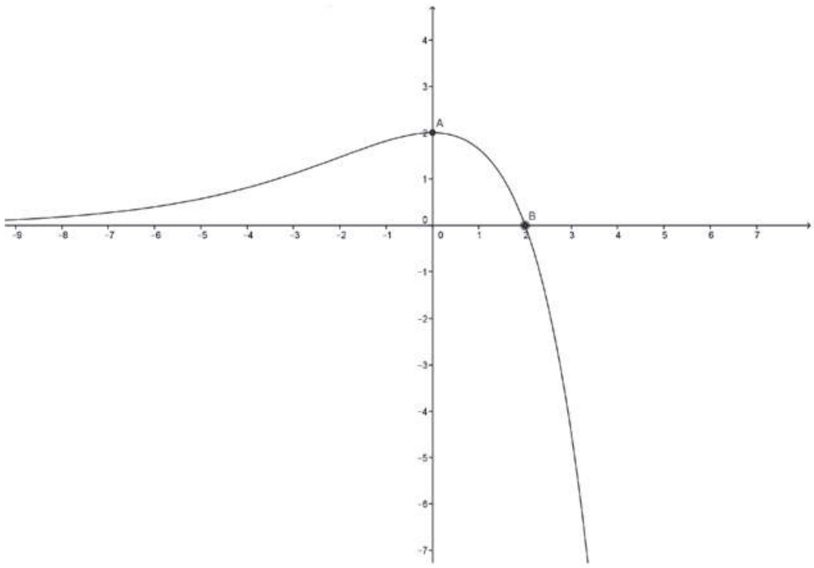
[1 punt]

b) Si $\boldsymbol{M}_1$ i $\boldsymbol{M}_2$ són dues matrius de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, amb $a, b \in \mathbb{R}$, comproveu que el producte $\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2$ té també la mateixa forma i que $\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{M}_1$.

[1 punt]

6. Responeu a les qüestions següents:

a) La funció $f(x) = (b - x)e^{ax}$, amb a i b constants, té la representació gràfica següent



i sabem que passa pels punts $A = (0, 2)$ i $B = (2, 0)$, i que en el punt A la recta tangent a la gràfica és horitzontal. Calculeu els valors de a i b.

[1 punt]

b) Calculeu $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Sigui $V = \{(-1, 1, 1), (-2, -1, 0), (1, 2, a)\}$ un conjunt de vectors de $\mathbb{R}^3$.

a) Trobeu el valor o els valors de a perquè V sigui linealment dependent.

b) Quan $a = 4$, expresseu el vector $\vec{v} = (3, 9, 14)$ com a combinació lineal dels vectors de V.

[1 punt per cada apartat]

2. De la funció polinòmica $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ sabem que

— té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -3$;

— la integral definida en l'interval $[0, 1]$ val $-\frac{5}{4}$.

Calculeu el valor dels paràmetres a i b.

[2 punts]

3. Donats el pla π: $x + 2y - z = 3$ i la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z+m}{4}$,

a) Comproveu que el vector característic (o normal) de π i el vector director de r són perpendiculars.

b) Estudieu la posició relativa de π i r en funció del paràmetre m.

[1 punt per cada apartat]

4. Siguin les matrius

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & 4 \\ 3 & c & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 5 & b & 8 \\ 1 & c & 3 \\ 4 & a & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 5 \\ -b & -a & -2 \end{bmatrix},$$

on a, b i c són paràmetres reals. Calculeu el valor d'aquests paràmetres perquè cap de les tres matrius tingui inversa.

[2 punts]

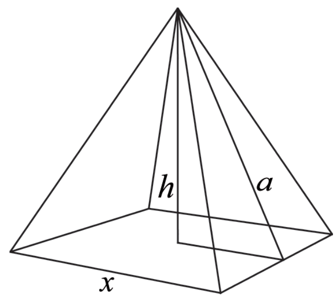
5. Donats el pla π: $2x - y + 3z - 8 = 0$ i el punt $P = (6, -3, 7)$,

a) Trobeu l'equació contínua de la recta que passa per P i és perpendicular a π.

b) Trobeu el punt del pla π que està més proper al punt P.

[1 punt per cada apartat]

6. Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Disposem de 300 m^2 de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem x la longitud d'un costat de la base de la tenda.



a) Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas,

$$V(x) = \frac{x\sqrt{(9\times 10^4) - x^4}}{6}$$

b) Determineu el valor de x perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).

[1 punt per cada apartat]

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Sabem que el vector (2, 1, –1) és una solució del sistema

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= a + c \\ bx - y + bz &= a - b - c \\ cx - by + 2z &= b \end{aligned}\right\}$$

Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c.

[2 punts]

2. La corba $y = x^2$ i la recta $y = k$, amb $k > 0$, determinen una regió plana.

a) Calculeu el valor de l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre k.

b) Trobeu el valor de k perquè l'àrea limitada sigui $\sqrt{6}\,u^2$.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

3. Sigui $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

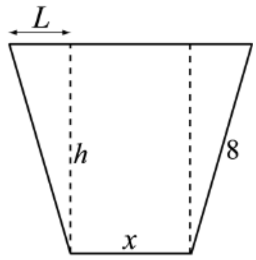
a) Què significa que la matriu $\boldsymbol{B}$ sigui la matriu inversa de $\boldsymbol{A}$?

b) Trobeu el valor del paràmetre p perquè la matriu inversa de $\boldsymbol{A}$ i la matriu transposada de $\boldsymbol{A}$ coincideixin.

NOTA: No aproximeu les arrels mitjançant valors amb decimals; treballeu amb els radicals.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

4. Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres. A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.



a) Trobeu el valor del segment L de la gràfica en funció de la variable x (amplària inferior del canal).

b) Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per

$$A(x)=\frac{3x\sqrt{256-x^2}}{4}$$

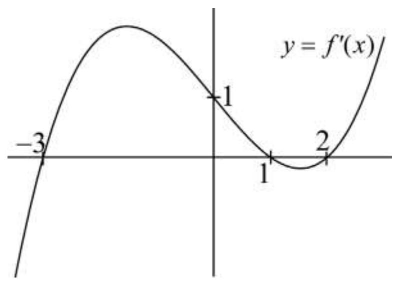
c) Calculeu el valor de x perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).

[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*]

5. Donats els punts $P=(1,\ 0,\ -1)$ i $Q=(-1,\ 2,\ 3)$, trobeu un punt R de la recta $r\colon \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$ que compleixi que el triangle de vèrtexs P, Q i R és isòsceles, en què $\overline{PR}$ i $\overline{QR}$ són els costats iguals del triangle.

[2 punts]

6. La funció $f(x)$ és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent $f'(x)$ creixent als intervals $(-\infty, -3]$ i $[2, +\infty)$.



a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.

b) Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció $f(x)$ i classifiqueu aquests extrems.

[1 punt per cada apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Sigui π: $3x - 2y + z = 10$.

a) Trobeu l'equació contínua de la recta r perpendicular a π que passa pel punt $P = (-1, 3, 2)$.

b) Trobeu també l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π_1 paral·lel a π que passa pel mateix punt P.

[1 punt per cada apartat]

2. Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix}$. Sigui $\boldsymbol{I}$ la matriu identitat d'ordre 2.

a) Trobeu el valor del paràmetre a perquè es compleixi que $\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

b) Calculeu la matriu inversa de la matriu $\boldsymbol{A}$ quan $a = -2$.

[1 punt per cada apartat]

3. Donada la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$ i la recta horitzontal $y = k$, amb $k > 0$,

a) Feu un esbós del recinte limitat per les gràfiques de la funció i la recta, i els eixos de coordenades.

b) Trobeu el valor de k sabent que l'àrea d'aquest recinte és igual a 14/3.

[0,5 per l'apartat *a*; 1,5 per l'apartat *b*]

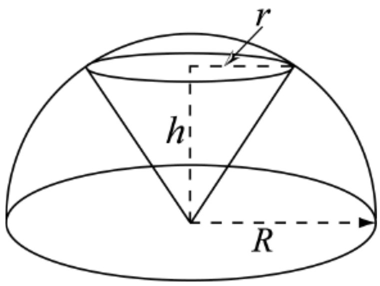
4. Un triangle d'àrea 3/2 té dos dels vèrtexs als punts $P = (0, 0, 0)$ i $Q = (2, 0, 1)$. El tercer vèrtex, R, és un punt de la recta

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

i té la primera coordenada no nul·la. Calculeu les coordenades del vèrtex R.

[2 punts]

5. En una semiesfera de radi R inscrivim un con situant el vèrtex al centre de la semiesfera, tal com es veu en el dibuix.



a) Sabent que el volum d'un con és igual a l'àrea de la base multiplicada per l'altura i dividida per 3, comproveu que, en aquest cas, podem expressar el volum com

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3}(R^2 - h^2)$$

b) Trobeu les dimensions d'aquest con (el radi de la base i l'altura) perquè el seu volum sigui màxim i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

6. Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta r: $y = x + 3$ en el punt d'abscissa $x = -1$, i que en el punt d'abscissa $x = 1$ la recta tangent és paral·lela a la recta r.

Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c.

[2 punts]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Siguin π_1 el pla $2x + 3y - z = 4$ i π_2 el pla $x - 2y - 4z = 10$.

a) Comproveu que els plans π_1 i π_2 són perpendiculars.

b) Trobeu l'equació contínua de la recta paral·lela als plans π_1 i π_2 i que passa pel punt $P = (-1, 3, 2)$.

[1 punt per cada apartat]

2. La matriu de coeficients d'un sistema d'equacions lineals homogeni és

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{bmatrix}$$

a) Per a quins valors del paràmetre a el sistema té una sola solució? Quina és aquesta solució única?

b) Resoleu el sistema si $a = 2$.

[1 punt per cada apartat]

3. Donats els punts $P = (1, -1, 2)$, $Q = (2, 0, 1)$ i $R = (3, 2, -1)$,

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que determinen.

b) Trobeu un punt S pertanyent a la recta $r: \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-5}{-3}$, de manera que el tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S tingui un volum igual a 1/2.

[1 punt per cada apartat]

4. Per a $x \geq 1$, considereu la funció $f(x) = +\sqrt{x-1}$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa igual a 10.

b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x)$, la recta d'equació $x = 5$ i l'eix OX.

[1 punt per cada apartat]

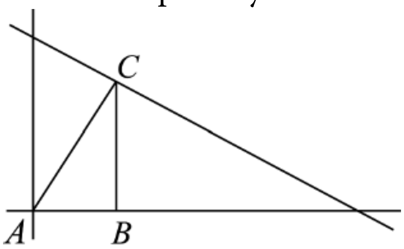
5. Considereu els punts $A = (-1, 2, 4)$ i $B = (3, 0, -2)$.

a) Trobeu l'equació del pla format per tots els punts que equidisten de A i B.

b) Donat un punt $C = (x, y, z)$, dividim el segment $\overline{AC}$ en tres parts iguals i obtenim els punts A, A_1, B i C. Trobeu el punt C.

[1 punt per cada apartat]

6. Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex A en l'origen de coordenades, el vèrtex $B = (x, 0)$ en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtex C pertany a la recta $x + 2y = 8$. L'angle recte és el que correspon al vèrtex B.



a) Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar de la manera següent: $A(x) = 2x - \dfrac{x^2}{4}$.

b) Trobeu els vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

[1 punt per cada apartat]

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2011-2012

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Determineu el rang de la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en funció del paràmetre k.
[2 punts]

2. Sigui $f(x) = \dfrac{ax^2}{x+b}$, en què $a \neq 0$.

a) Determineu si té alguna asímptota vertical, en funció del paràmetre b.
b) Indiqueu el valor dels paràmetres a i b perquè la funció $f(x)$ tingui la recta $y = 2x - 4$ com a asímptota obliqua a $+\infty$.
[1 punt per cada apartat]

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{aligned} x + y - 3z &= 2 \\ 2x + ay - 5z &= 2a + 3 \\ 2x - 3y + (a-2)z &= 9 \end{aligned}\right\}$$

a) Calculeu el valor o els valors del paràmetre a per al qual o per als quals el sistema és compatible indeterminat.
b) Quantes solucions té aquest sistema quan $a = -3$?
[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

4. Una fàbrica produeix diàriament x tones d'un producte A i $(40-5x)/(10-x)$ tones d'un producte B. La quantitat màxima de producte A que es pot produir és 8 tones. El preu de venda del producte A és 100€ per tona i el del producte B és 250€ per tona.

a) Construïu la funció de la variable x que ens proporciona els ingressos diaris, suposant que es ven tota la producció.

b) Calculeu quantes tones de cada producte s'han de produir diàriament per a obtenir el màxim d'ingressos, i comproveu que és realment un màxim relatiu.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

5. Considereu les rectes de l'espai següents:

$$r: \frac{x+1}{2} = y-1 = \frac{z-1}{-1}, \quad s: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

a) Comproveu que són secants.

b) Calculeu l'equació contínua de la recta que les talla i que és perpendicular a totes dues.

[1 punt per cada apartat]

6. Donades la recta $y = ax + 1$ i la paràbola $y = 3x - x^2$,

a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè siguin tangents.

b) Calculeu els punts de tangència.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2011-2012

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Digueu per a quin valor del paràmetre m els plans

$$\pi_1: x-y+mz=1,\ \pi_2: x-y+z=m \text{ i } \pi_3: my+2z=3$$

tenen com a intersecció una recta.

[2 punts]

2. Donades la recta $y=3x+b$ i la paràbola $y=x^2$,

a) Calculeu l'abscissa del punt on la recta tangent a la paràbola és paral·lela a la recta donada.

b) Calculeu el valor del paràmetre b perquè la recta sigui tangent a la paràbola.

[1 punt per apartat]

3. Donats el pla $\pi: x-y+2z-5=0$ i la recta $r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases}$,

a) Calculeu el punt d'intersecció entre el pla i la recta.

b) Trobeu l'equació contínua de la recta s continguda en el pla π, que és perpendicular a la recta r i talla la recta r.

[1 punt per apartat]

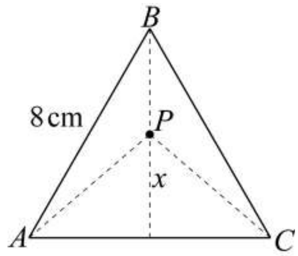
4. Donades les matrius $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

a) Comproveu que es compleix la igualtat $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

b) És certa aquesta igualtat per a qualsevol parell de matrius quadrades ***A*** i ***B*** del mateix ordre? Responeu raonadament utilitzant les propietats generals de les operacions entre matrius, sense utilitzar matrius ***A*** i ***B*** concretes.

[1 punt per apartat]

5. Un triangle equilàter de vèrtexs A, B i C té els costats de 8 cm. Situem un punt P sobre una de les altures del triangle, a una distància x de la base corresponent.



a) Calculeu l'altura del triangle de vèrtexs A, B i C.

b) Indiqueu la distància del punt P a cadascun dels vèrtexs (en funció de x).

c) Determineu el valor de x perquè la suma dels quadrats de les distàncies del punt P a cadascun dels tres vèrtexs sigui mínima.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*]

6. Donats els punts $P=(1, 0, 0)$, $Q=(0, 2, 0)$, $R=(0, 0, 3)$ i $S=(1, 2, 3)$,

a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del pla que conté els punts P, Q i R.

b) Comproveu si els quatre punts són coplanaris (és a dir, si els quatre estan continguts en un mateix pla).

[1 punt per apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2011-2012

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

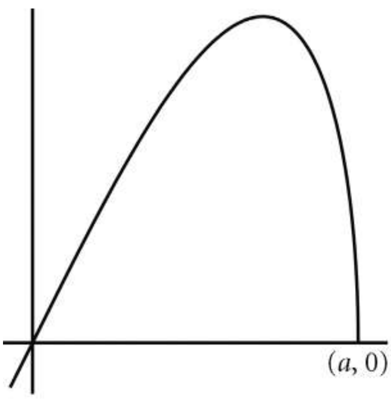
1. Donats els plans $\pi_1: 3x+y-2z+15=0$ i $\pi_2: x+y+2z-103=0$,

a) Comproveu que són perpendiculars.

b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del pla perpendicular a π_1 i π_2, que passa pel punt $P=(1, 3, 2)$.

[1 punt per cada apartat]

2. La gràfica de la funció $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$ és la següent:



a) Trobeu el punt de tall, $(a, 0)$, de la funció amb la part positiva de l'eix OX.

b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x)$ i l'eix OX en el primer quadrant.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

3. Sigui $\boldsymbol{A}$ una matriu quadrada d'ordre n de manera que $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$, en què $\boldsymbol{O}$ és la matriu nul·la (la formada completament per zeros).

a) Comproveu que $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)^2 = 2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n$.

b) Comproveu que les matrius $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n$ són l'una inversa de l'altra.

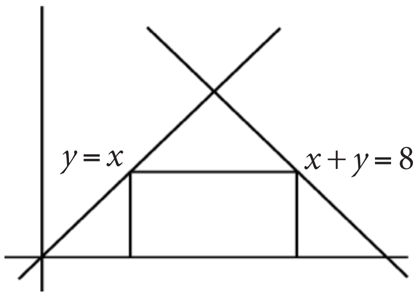
[1 punt per cada apartat]

4. Un rectangle és inscrit en el triangle que té els costats en les rectes d'equacions

$$y=x, \quad x+y=8, \quad y=0,$$

i té un costat sobre la recta $y=0$. Trobeu-ne els vèrtexs perquè la superfície sigui màxima.

[2 punts]



5. Contesteu les preguntes següents:

a) Expliqueu raonadament si una matriu d'ordre 3 i una matriu d'ordre 2 poden tenir el mateix determinant.

b) Considereu les matrius següents:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & 1-p & 2 \\ 1 & 2 & p \end{pmatrix} \text{ i } \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}$$

Calculeu, si és possible, el valor del paràmetre p perquè $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B}$.

[1 punt per cada apartat]

6. Siguin $\pi: x-3y+2z=1$ i $r: \begin{cases} 3x+y=1 \\ 2x-y+mz=1 \end{cases}$. Estudieu-ne la posició relativa segons el valor del paràmetre m.

[2 punts]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2010-2011

Matemàtiques

Sèrie 2

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Donada la matriu $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$:

a) Calculeu els valors del paràmetre k per als quals la matriu $\boldsymbol{M}$ no és invertible.

b) Per a $k=0$, calculeu $\boldsymbol{M}^{-1}$.

[1 punt per cada apartat]

2. Donada la recta $\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=2 \\ x+z+1=0 \end{array}\right\}$, calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del pla perpendicular a la recta que passa pel punt $P=(1, 0, -1)$.

[2 punts]

3. Donada la funció $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$:

a) Determineu la relació que han de complir els paràmetres a, b i c perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=-1$.

b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè hi hagi un punt d'inflexió de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=0$.

c) Determineu la relació entre els paràmetres a, b i c sabent que la gràfica de $f(x)$ talla l'eix OX en el punt d'abscissa $x=-2$.

d) Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c perquè es compleixin les tres propietats anteriors alhora.

[0,5 punts per cada apartat]

4. Sigui la matriu $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu $\boldsymbol{A}^2$ i $\boldsymbol{A}^3$.
b) Deduïu el valor de $\boldsymbol{A}^{101}$.
NOTA: Treballeu amb radicals; no utilitzeu la representació decimal dels elements de la matriu.
[1 punt per cada apartat]

5. Considereu la recta $r: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=z-a$ i el pla $\pi: 2x+y-5z=5$.

a) Estudieu la posició relativa de la recta r i el pla π en funció del paràmetre a.
b) Quan $a=3$, calculeu la distància de la recta r al pla π.
[1 punt per cada apartat]

6. Sigui $f(a)=\int_0^{1/a}(a^2+x^2)dx$ per $a>0$.

a) Comproveu que $f(a)=\dfrac{1}{3a^3}+a$.

b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè la funció $f(a)$ tingui un mínim relatiu.
[1 punt per cada apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2010-2011

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Donada la recta $r:\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$:

a) Trobeu-ne un vector director.

b) Calculeu l'equació contínua de la recta paral·lela a r que passa pel punt $P=(1, 0, -1)$.

[1 punt per cada apartat]

2. Si tenim la matriu invertible $\boldsymbol{A}$ i l'equació matricial $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$:

a) Aïlleu la matriu $\boldsymbol{X}$.

b) Trobeu la matriu $\boldsymbol{X}$ quan $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

[1 punt per cada apartat]

3. Definim les funcions $f(x)=a(1-x^2)$ i $g(x)=\dfrac{x^2-1}{a}$, en què $a>0$.

a) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de les funcions és:

$$\frac{4(1+a^2)}{3a}$$

b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè aquesta àrea sigui mínima.

[1 punt per cada apartat]

4. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} x+2y-az&=-3\\ 2x+(a-5)y+z&=4a+2\\ 4x+(a-1)y-3z&=4 \end{aligned}\right\}$$

a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè el sistema no sigui compatible determinat.

b) Hi ha algun valor de a per al qual $x=1$, $y=-3$, $z=-1$ sigui l'única solució del sistema?

[1 punt per cada apartat]

5. Siguin $r_1: x-2=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{1-z}{2}$ i $r_2: \dfrac{x+3}{2}=y+1=\dfrac{z+1}{2}$.

a) Comproveu que r_1 i r_2 són perpendiculars.

b) Comproveu que es tallen mitjançant la determinació del punt de tall.

[1 punt per cada apartat]

6. Sigui $f(x)=x^2\cdot e^{-ax}$ quan $a\neq 0$.

a) Calculeu el valor de a perquè aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=2$.

b) Quan $a=2$, classifiqueu-ne els extrems relatius.

[1 punt per cada apartat]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2010-2011

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Calculeu l'àrea del recinte limitat per les corbes d'equació $f(x)=x^2-x+2$ i $g(x)=5-3x$.

[2 punts]

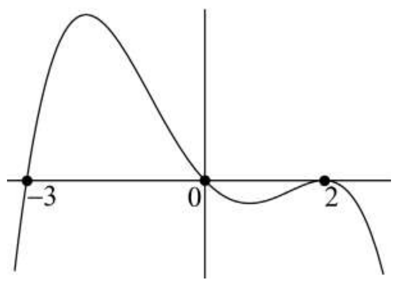
2. Donat el pla $\pi: 2x+y-z=5$:

a) Calculeu l'equació del pla paral·lel al pla π que passa pel punt $P=(1, 0, -1)$.

b) Determineu també la distància entre el punt P i el pla π.

[1 punt per cada apartat]

3. La gràfica corresponent a la derivada d'una funció $f(x)$ és la següent:



a) Expliqueu raonadament quins valors de x corresponen a màxims o a mínims relatius de $f(x)$.

b) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

4. Analitzeu, segons els valors del paràmetre k, el caràcter (és a dir, si és compatible o no i si és determinat o no) del sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} 2x + y - z = k - 4 \\ (k-6)y + 3z = 0 \\ (k+1)x + 2y = 3 \end{cases}$$

[2 punts]

5. Calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) dels plans que contenen la recta $r: \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ i que formen un angle de 45° amb el pla $z=0$.

[2 punts]

6. Dins d'un triangle rectangle, de catets 3 i 4 cm, hi ha un rectangle. Dos costats del rectangle estan situats en els catets del triangle i un dels vèrtexs del rectangle és a la hipotenusa del triangle.

a) Feu un esbós de la situació descrita.

b) Si x és la longitud del costat del rectangle que està situat en el catet petit i y és l'altre costat del rectangle, comproveu que es compleix que $4x+3y=12$.

c) Determineu les dimensions del rectangle perquè l'àrea sigui màxima.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2009-2010

Matemàtiques

Sèrie 2

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Trobeu les asímptotes de la funció $f(x) = \dfrac{3x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4x - 5}$.
[2 punts]

2. Donats el pla $\pi: 5x + y + 3z = 4$ i la recta $r: \begin{cases} ax - y = 2 \\ 2y + z = -3 \end{cases}$, estudieu-ne la posició relativa en funció del paràmetre a.
[2 punts]

3. Considereu tots els prismes rectes de base quadrada amb un volum V fixat. Anomeneu x el costat de la base del prisma i y la seva altura.
a) Trobeu l'expressió del volum i de l'àrea total del prisma en funció de les variables x i y.
b) Comproveu que el que té àrea total mínima és en realitat un cub.
[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

4. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.
a) Comproveu que compleix la igualtat $A^2 - 5A = I_2$, on I_2 és la matriu identitat d'ordre 2.
b) Utilitzeu aquesta igualtat per a calcular la matriu inversa de A.
c) Resoleu l'equació matricial $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, utilitzant la matriu inversa de A.
[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,75 punts per l'apartat *b*; 0,75 per l'apartat *c*]

5. Sigui $f(x) = \dfrac{8x^2}{2x+1}$. Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica d'aquesta funció, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 2$.

[2 punts]

6. Considereu la recta $r: \dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y-1}{-1} = z-1$.

a) Trobeu els dos punts, A i B, de la recta r que estan situats a una distància $d = \sqrt{6}$ del punt $P = (-1, 1, 2)$.

b) Trobeu l'àrea del triangle de vèrtexs A, B i P.

[1 punt per cada apartat]

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2009-2010

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que conté la recta $r_1 : \dfrac{x-1}{2} = y = 2 - z$ i és paral·lel a la recta $r_2 : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

[2 punts]

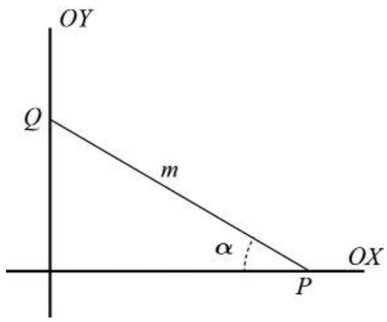
2. Donat el sistema d'equacions lineals $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = -1 \\ 2x + y + z = 4 \\ x - y + (p-3)z = 5 \end{array}\right\}$:

a) Estudieu-ne el caràcter (és a dir, si és compatible o no i si és determinat o no) en funció del paràmetre p.

b) Comproveu que si $p \neq 5$ la solució del sistema no depèn del valor d'aquest paràmetre.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

3. Un segment de longitud fixada m recolza sobre els eixos de coordenades. Calculeu el valor de l'angle α que forma el segment amb l'eix OX perquè el triangle rectangle determinat pel segment amb els eixos i del qual m és la hipotenusa tingui àrea màxima. Comproveu que es tracta realment d'un màxim.



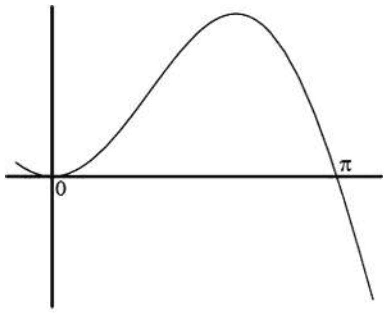
[2 punts]

4. Donades les rectes $r_1: \dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-4}$ i $r_2: \begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-y+z+11=0 \end{cases}$:

a) Comproveu que són paral·leles.
b) Trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que les conté.

[1 punt per cada apartat]

5. La gràfica de la funció $f(x) = x \cdot \sin(x)$ és la següent:



a) Trobeu-ne una primitiva.
b) Aplicant el resultat de l'apartat anterior, calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses des de $x = 0$ fins a $x = \pi$.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

6. Sigui $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de les variables x i y perquè es compleixi que $A^2 = A$.

[2 punts]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2009-2010

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Donats el pla $\pi: x + 2y + 3z - 4 = 0$ i els punts $P = (3, 1, -2)$ i $Q = (0, 1, 2)$:

***a*)** Calculeu l'equació contínua de la recta perpendicular al pla π que passa pel punt P.

***b*)** Calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla perpendicular a π que passa pels punts P i Q.

[1 punt per cada apartat]

2. Considereu la igualtat matricial $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

***a*)** Comproveu si les matrius $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ compleixen o no la igualtat anterior.

***b*)** En general, donades dues matrius qualssevol A i B quadrades del mateix ordre, expliqueu raonadament si hi ha alguna condició que hagin de complir perquè la igualtat de l'enunciat sigui certa.

[1 punt per cada apartat]

3. Sigui $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomi qualsevol de segon grau.

***a*)** Trobeu la relació existent entre els paràmetres a, b i c sabent que es compleix que $P(1) = 0$ i $P(2) = 0$.

***b*)** Quan es compleix la condició anterior, indiqueu quins valors pot tenir $P'(3/2)$.

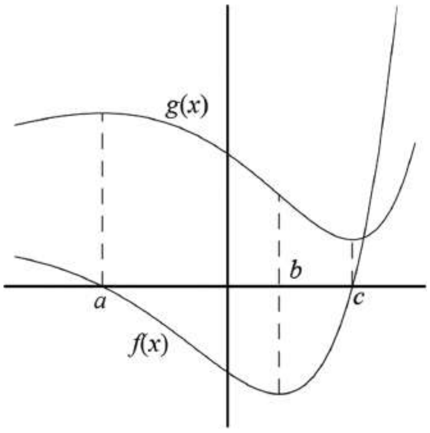
[1 punt per cada apartat]

4. Hem escalonat la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, $A \cdot X = b$, i hem obtingut:

$$\left(A|b\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & a+2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 3 \end{array}\right)$$

a) Discutiu aquest sistema en funció del paràmetre a.
b) Resoleu-lo quan $a = 2$.
[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

5. En la figura següent es representen dues funcions. L'una és la derivada de l'altra. Decidiu si la funció $f(x)$ és la derivada de la funció $g(x)$ o és a l'inrevés, estudiant què passa en els punts $x = a$, $x = b$ i $x = c$.



[2 punts]

6. Siguin $\vec{u}_1 = (-1, 3, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, 4)$ i $\vec{u}_3 = (a + 1, a - 1, 4a + 2)$ tres vectors de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$.
a) Trobeu el valor del paràmetre a per al qual el vector $\vec{u}_3$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$.
b) Comproveu que per a $a = 0$ el conjunt $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és linealment independent.
[1 punt per cada apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2009-2010

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu un sistema qualsevol de dues equacions amb tres incògnites. Responeu raonadament a les qüestions següents:

a) És possible que el sistema considerat sigui compatible determinat?

b) Pot ser incompatible?

[1 punt per cada apartat]

2. Donats el punt $P = (1, 0, -2)$ i la recta $r: \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+3}{-3}$:

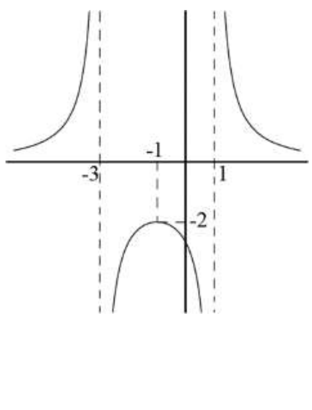
a) Trobeu l'equació contínua de la recta que passa pel punt P i talla perpendicularment la recta r.

b) Calculeu la distància del punt P a la recta r.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

3. Determineu el valor dels paràmetres a, b i c perquè la gràfica de la funció

$f(x) = \frac{a}{x^2 + bx + c}$ sigui la següent:



[2 punts]

4. Siguin A, B i C matrius quadrades d'ordre n.

a) Expliqueu raonadament si és possible que $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ i $\det (A \cdot B) = 0$. Si és possible, poseu-ne un exemple.

b) Si sabem que $\det A \neq 0$ i que $A \cdot B = A \cdot C$, expliqueu raonadament si podem assegurar que $B = C$.

[1 punt per cada apartat]

5. Siguin r i s dues rectes d'equacions

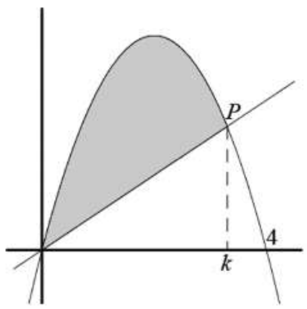
$$r:(x,y,z) = (-4,3,4) + t(2,-1,1)\ ,\quad s: x+1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-a}{3}\,.$$

a) Trobeu el valor del paràmetre a perquè aquestes rectes es tallin.

b) En el cas en què es tallen, trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que les conté.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

3. En la figura es mostra la corba $y = x(4 - x)$ i una recta r que passa per l'origen i talla la corba en un punt P d'abscissa k, amb $0 < k < 4$.



a) Trobeu l'àrea ombrejada, delimitada per la corba i la recta, en funció de k.

b) Trobeu per a quin valor de k l'àrea de la regió ombrejada és la meitat de l'àrea del recinte limitat per la corba i l'eix OX.

[1 punt per apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés