Construcció dinàmica i col·laborativa d'una funció contínua i derivable

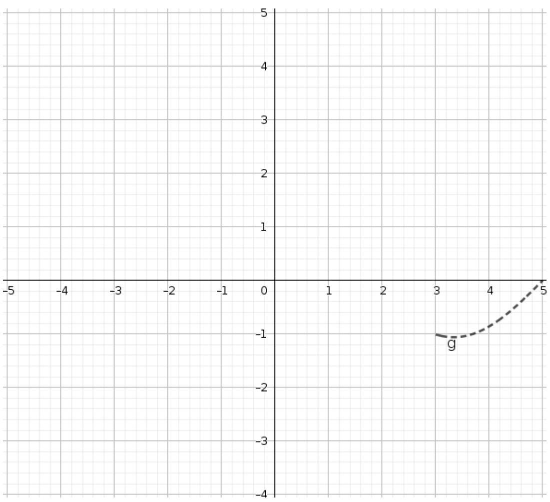
L'activitat consisteix en construir una funció col·laborativa a trossos entre 4 estudiants de manera que la funció sigui contínua i derivable en tot el seu domini sobre una fotografia matemàtica on la farem dinàmica.

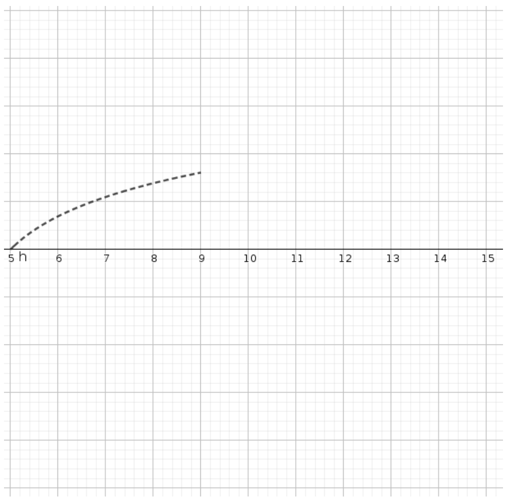
1. Decidir les funcions

Cada estudiant pensa una funció per tal d'ajuntar-les de manera contínua i derivable. El primer pas és posar-se d'acord. Per exemple:

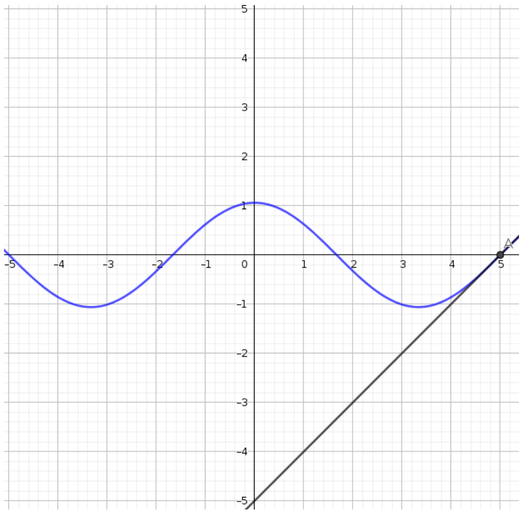
Individu A ha de pensar una funció que acabi en un punt, per exemple, el (5,0) amb un pendent de recta tangent m=1

Individu B ha de pensar una funció que comenci en el el mateix punt (5,0) amb el mateix pendent de recta tangent m=1

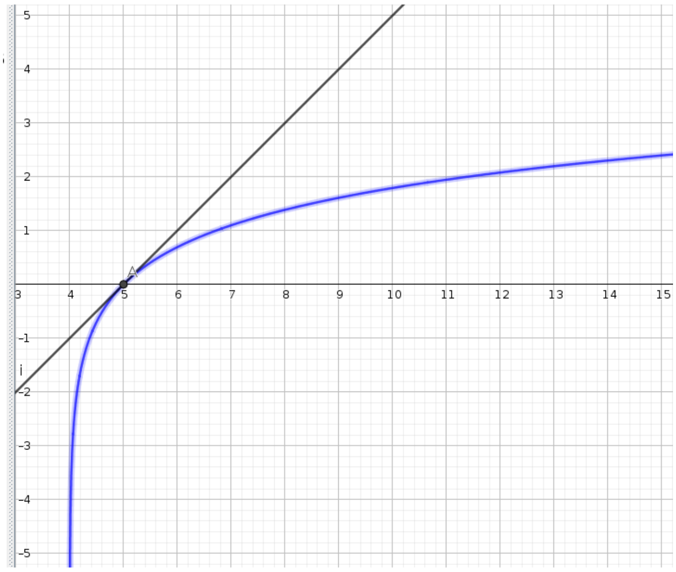




Per exemple, l'individu A podria pensar en utilitzar la funció y=cos(x) de la que sap que en el punt $(\frac{3\pi}{2},0)$ la seva recta tangent té pendent 1. Com que vol que això passi en el punt (5,0) haurà de modificar la funció aplicant un coeficient de dilatació $5:\frac{3\pi}{2}$, és a dir dividim per $\frac{3\pi}{2}$ i multipliquem per 5. Recordem que per dilatar una funció el coeficient de dilatació k s'aplica fent $y=kf(\frac{x}{k})$. Per tant, la funció resultant serà: $y=\frac{2\cdot5}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi x}{2\cdot5}\right)$



L'individu B, per exemple, vol utilitzar la funció y=ln(x) que passa pel punt (0,1) on el pendent de la recta tangent és 1. Movent la funció a la dreta 4 unitats tindrem una funció que enllaçarà amb l'anterior en el punt (5,0) de manera contínua i derivable. En aquests cas y=ln(x-4)



Finalment es poden ajuntar els dos trossos de funcions al GeoGebra amb les expressions:

Si(<Condició>, <Aleshores>)

o també amb:

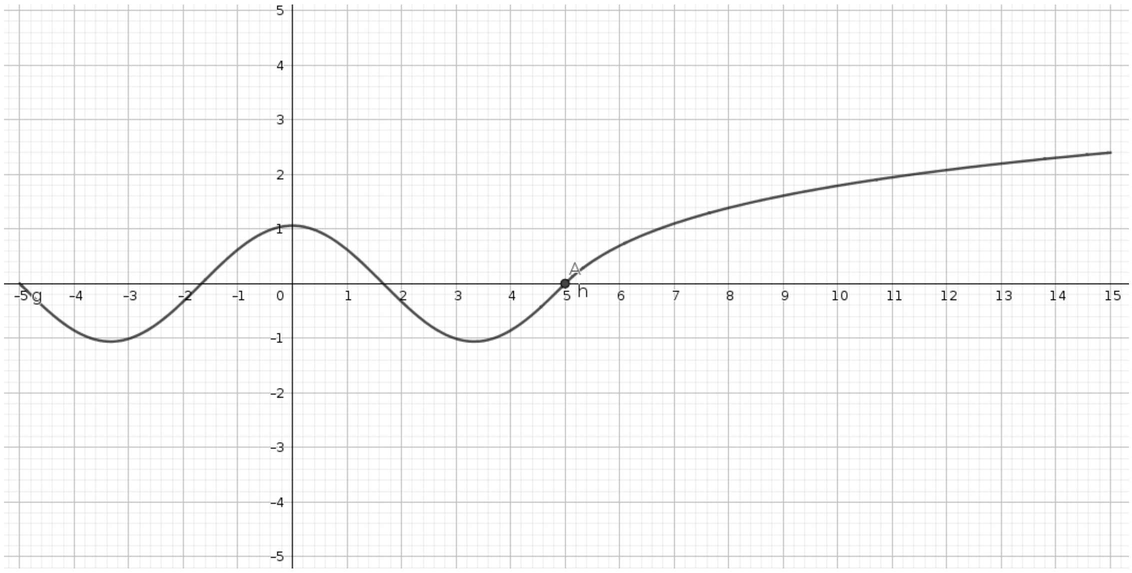
Si(<Condició>, <Aleshores>, <Altrament>)

Aquesta última expressió permet encadenar funcions condicionals aconseguint una única funció definida a trossos amb tants trossos com vulguem, fent:

Si(<Condició>, <Aleshores>, (Si(<Condició>, <Aleshores>, (Si(<Condició>, <Aleshores>, <Altrament...>)))))

En aquest exemple podem ajuntar els dos trossos en una sola f*unció definida a trossos* amb la expressió:

f(x) = Si(-5 < x < 5, 5 / (3π / 2) cos(3π / 2 x / 5), Si(5 < x < 15, log(e, x – 4))), obtenint:

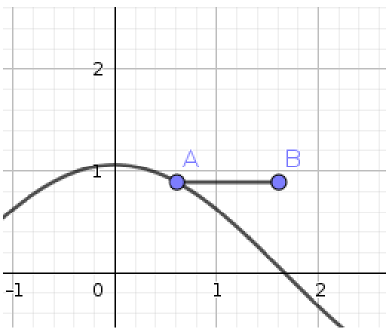


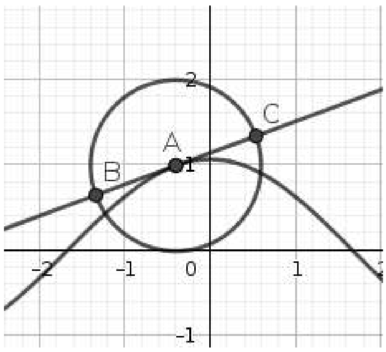
2. Un «objecte» que es mou resseguint la funció

En el context de la fotografia matemàtica ara proposem incrustar un punt a la funció que es mogui resseguint-la.

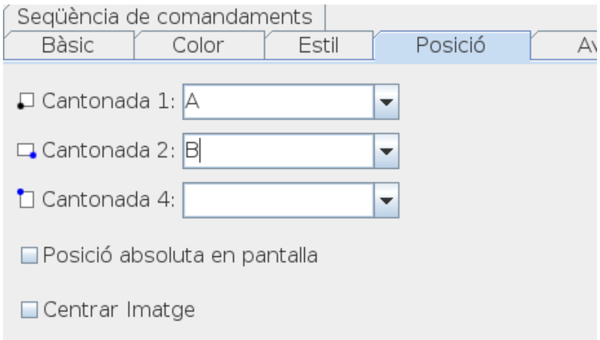
Per fer-ho, es pot simplement posar un punt a sobre de la funció i prémer «animació activada» amb el botó dret a sobre del punt. Però amb aquesta opció no tenim el control total del punt. És preferible inserir un punt lliscant «a» definit en l'interval desitjat i introduir el punt A=(a,f(a)). Amb aquesta opció podem controlar millor la seva velocitat, el sentit de moviment, etc.

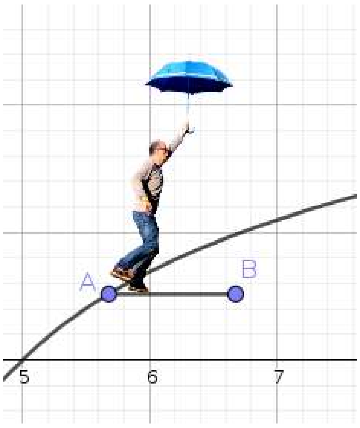
Ara, com que el què volem que ressegueixi la funció és la vostra fotografia de Thales, caldria vincular un altre punt B a aquest punt A posant, per exemple un simple segment de longitud donada. Però també ho podem fer utilitzant les interseccions B, C de la funció o la tangent amb una circumferència de centre A i un radi determinat. Amb aquesta segona opció l'objecte a més de resseguir la funció també resseguirà la seva inclinació.

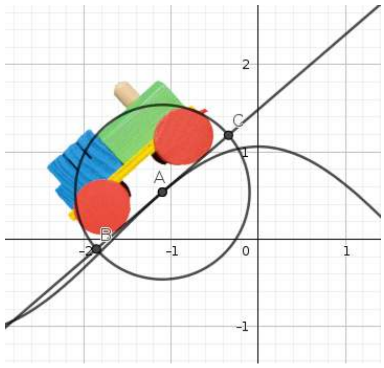




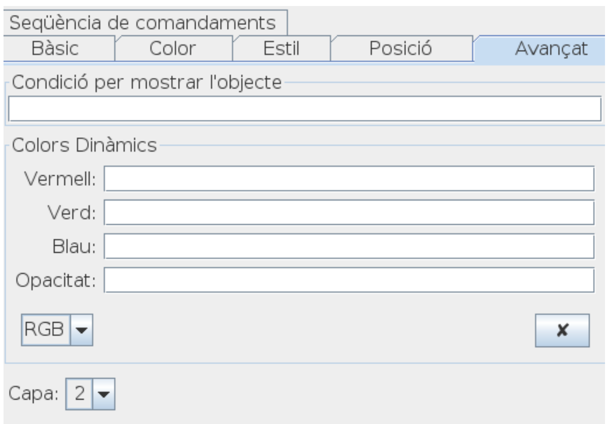
Ara sols queda inserir la imatge i amb el botó dret del ratolí a sobre de la imatge aconseguim:



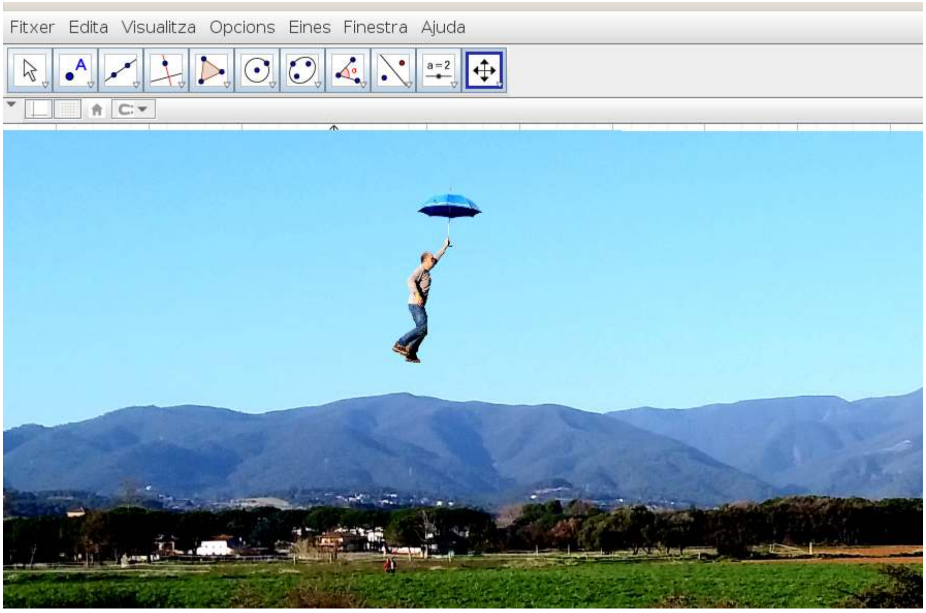




El pas següent consisteix en inserir la imatge de fons, però abans cal que indiqueu que la imatge en moviment que hi ha sobre estigui en una capa superior (ho farem amb el botó dret a sobre de la imatge i a la pestanya «avançat»)



Finalment amagarem tots els elements geomètrics del GeoGebra i activarem l'animació del punt lliscant (una vegada més amb el botó dret) i d'aquesta manera obtenim l'efecte desitjat:



3. El paisatge circula d'esquerra a dreta

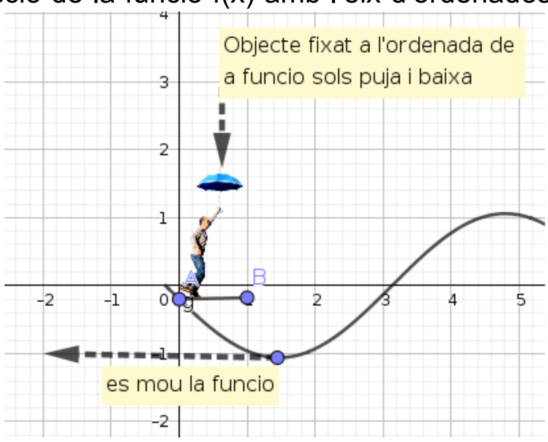
Recordem que l'activitat consisteix en ajuntar una quantitat de trossos de funció, tants com estudiants per grup. Per aconseguir-ho necessitaríem encongir molt el rang utilitzat empobrint el resultat. Una alternativa fantàstica consisteix en aconseguir un objecte que «es mou» resseguint la funció d'una manera «estàtica» i al mateix temps que sigui el propi paisatge el que circuli de dreta a esquerra. L'efecte visual aconseguit amb aquesta estratègia simularia una càmera en moviment que segueix a l'objecte estàtic.

En aquest cas, en comptes de vincular la imatge al punt A = (a,f(a)) es tractaria de fer modificar la funció f(x) substituint «x» per «**x+a**». (Recordeu, a és el punt lliscant.)

En l'exemple que estem mostrant podrien posar:

f(x) = Si(-5 < **x+a** < 5, 5 / (3π / 2) cos(3π / 2 (**x+a**) / 5), Si(5 < **x+a** < 15, log(e, **x+a** – 4)))

Ara el punt A s'introduiria directament clicant la intersecció de la funció f(x) amb l'eix d'ordenades. Si activem l'animació del punt lliscant serà la funció la que es desplaçarà cap a l'esquerra i el punt pujarà i baixarà resseguint la funció donant la sensació que estem seguint el punt amb una càmera en moviment, com si estiguéssim filmant des d'un helicòpter o un dron.



Quan afegim els altres trossos de funcions ampliarem el paràmetre a amb rang des de -5 fins 5, 15, 25, 35, etc.

Finalment la base de la imatge de fons ha de quedar vinculada per l'esquerra al punt (-5 - a, -5)* i per la dreta, en l'exemple anterior, al punt (15 - a, -5). Quan afegim els altres trossos de funció, el punt de la dreta seria (25-a,-5), (35-a,-5), (45 -a, -5) etc.

* El valor -5 indica l'altura de la base de la foto, ja que hem hem triat que sigui quadrat. Aquest valor pot ser un altre qualsevol que permeti ajustar la foto a l'efecte visual desitjat.

4. Modelar amb funcions

L'activitat que proposem els estudiants han de decidir a priori un punt de trobada amb continuïtat i derivabilitat, i després desenvolupar la creativitat per tal de trobar una funció que, amb les condicions prefixades tingui un fort interès en el context de la imatge.

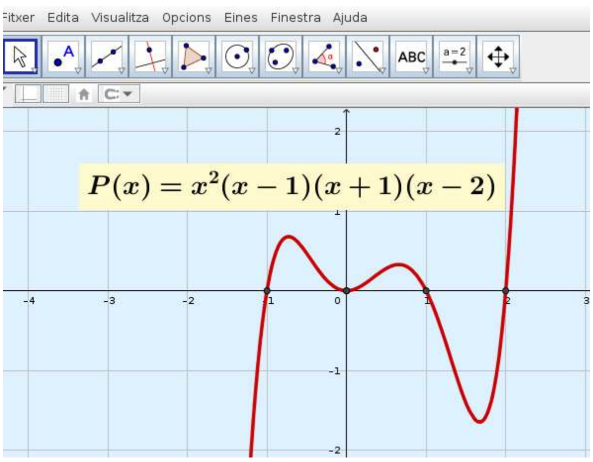
Existeixen multitud de maneres de crear la funció, i aquí la capacitat creativa i els coneixements dels estudiants són fonamentals.

Una alternativa interessant és considerar funcions de certa complexitat amb paràmetres i trobar els paràmetres resolent sistemes d'equacions després d'aplicar les condicions de continuïtat i derivabilitat, així com l'acotació en els màxims i mínims absoluts. Les funcions emprades poden ser polinòmiques, trigonomètriques, fraccions algèbriques, etc. però vigilant que no tinguin discontinuïtats en el rang del domini emprat.

Una altra alternativa visualment més atractiva i matemàticament més potent consistiria en modelar les funcions amb paràmetres (punts lliscants) directament amb GeoGebra, però per dur a terme amb èxit aquesta estratègia caldria conèixer quines són les funcions elementals així com algunes de les estratègies significatives que permeten modificar-les. Veiem alguns exemples:

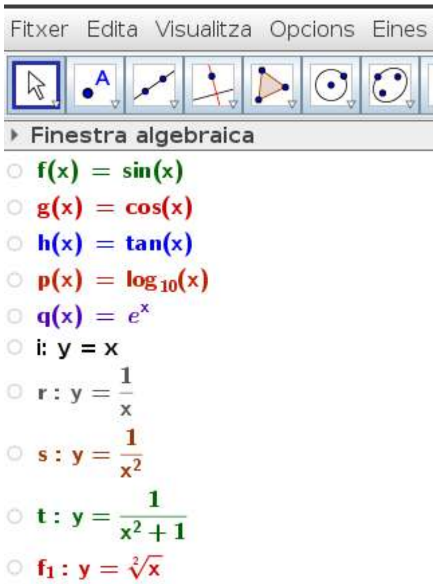
4.1. Les arrels dels polinomis

Les arrels dels polinomis vinculades a punts lliscants permeten una gran varietat de corbes sinuoses. Recordem que les arrels simples (i les d'índex senar) generen canvis de signe i per tant «travessen» l'eix d'abscisses però les arrels dobles (i les d'índex parell) no generen canvi de signe i per tant «reboten» a l'eix:



4.2. Les funcions elementals

Cal tenir present les característiques fonamentals de les funcions elementals. Es poden afegir algunes funcions més que es consideren d'interès:

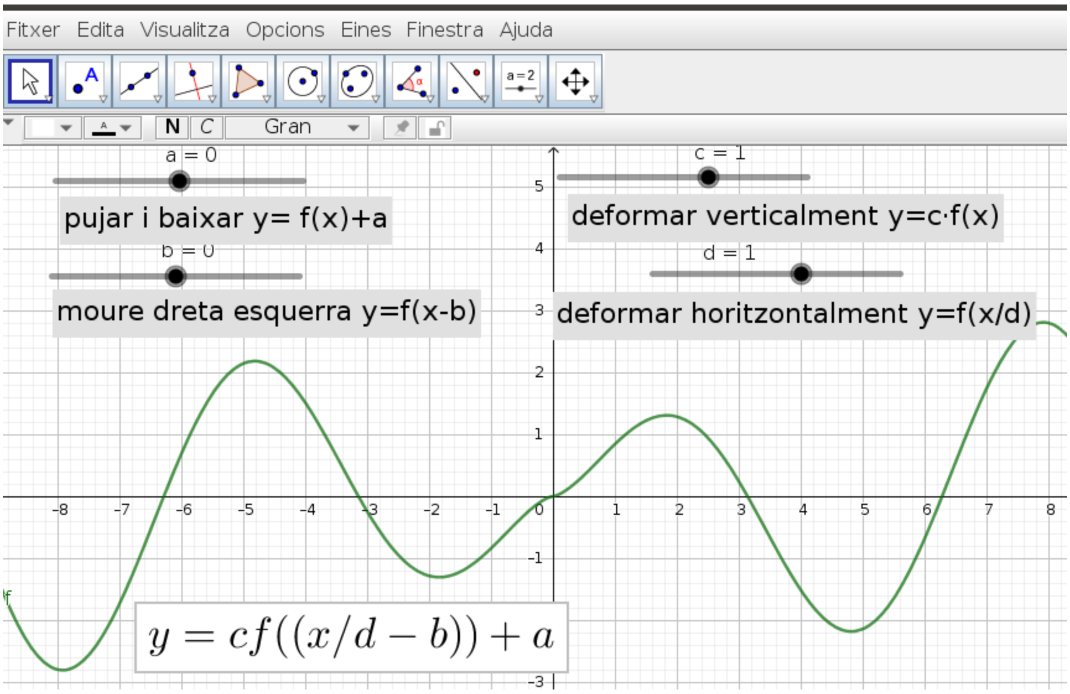


4.3. Modificacions bàsiques

Ara caldria analitzar com podem modificar d'una manera elemental les funcions.

- Moure vertical i horitzontalment.
- Deformar horitzontal i verticalment així com dilatar-les o encongir-les.

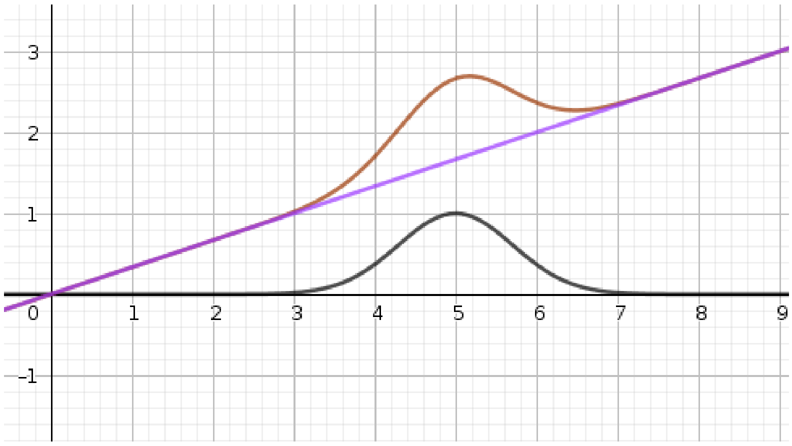
Aquest tipus de reflexions sempre és preferible potenciar la recerca de l'estudiant directament sobre el GeoGebra:



4.4. Com deformar localment una funció

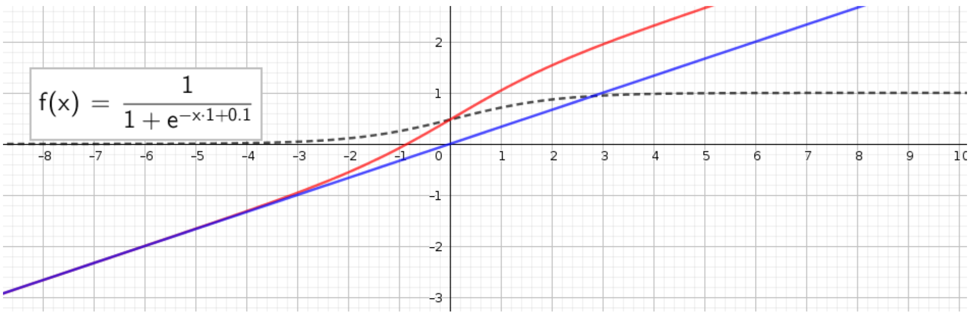
Per deformar **localment** una funció es pot sumar la funció $g(x)=\frac{a}{e^{((x-b)^2)}}$ que escriurem al GeoGebra: g(x) = a / e^((x - b)^2) o multiplicar per $g(x)=\frac{a}{e^{((x-b)^2)}}+1$ g(x) = a / e^((x – b)^2)+1

(amb a, i b punts lliscants)



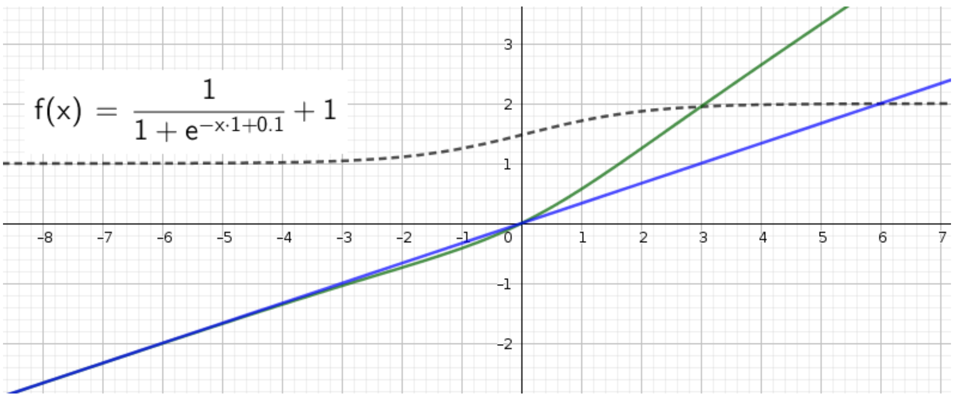
4.5. Com deformar lateralment una funció

Es pot fer sumant la funció $g(x)=\frac{a}{(1+e^{(-xd+b)})}$ escrivint g(x) = a / (1 + e^(-x d + b))

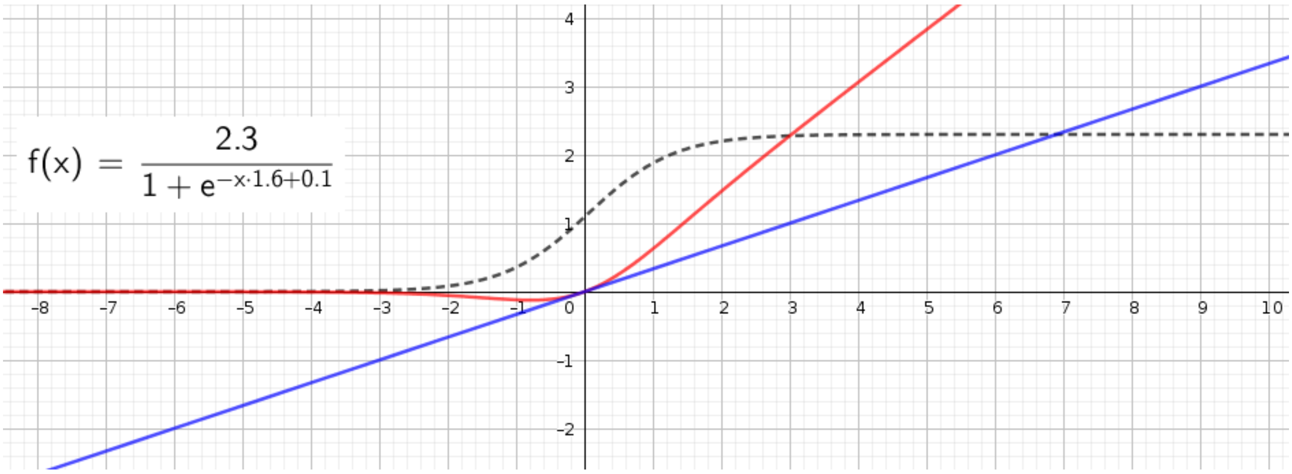


o bé multiplicant per $g(x)=\frac{a}{(1+e^{(-x\,d+b)})}+1$ escrivint g(x) = a / (1 + e^(-x d + b)) +1

(amb a, b i d punts lliscants)



Es pot observar com si multipliquem per la funció $g(x)=\frac{a}{(1+e^{(-xd+b)})}$ escrivint g(x) = a / (1 + e^(-x d + b)), podrem aplanar un lateral de la funció:



És interessant observar que aquestes modificacions estan basades en la funció logística $g(x)=\frac{a}{(1+e^{(-xd+b)})}$ i en la corba normal $g(x)=\frac{a}{e^{((x-b)^2)}}$, dues funcions de gran rellevància en el món de la matemàtica aplicada. Per altra banda també es podrien utilitzar altres funcions per «deformar» com per exemple sumar o multiplicar per funcions lineals, o quadràtiques o utilitzar la funció $y=\frac{1}{1+x^2}$ com alternativa a la corba normal.

Finalment volem incidir en l'oportunitat d'aquesta activitat que permet introduir funcions conegudes analitzant les seves propietats i, sobretot, potenciar la imaginació i la creativitat dels estudiants descobrint noves possibilitats de la matemàtica i la seva bellesa.