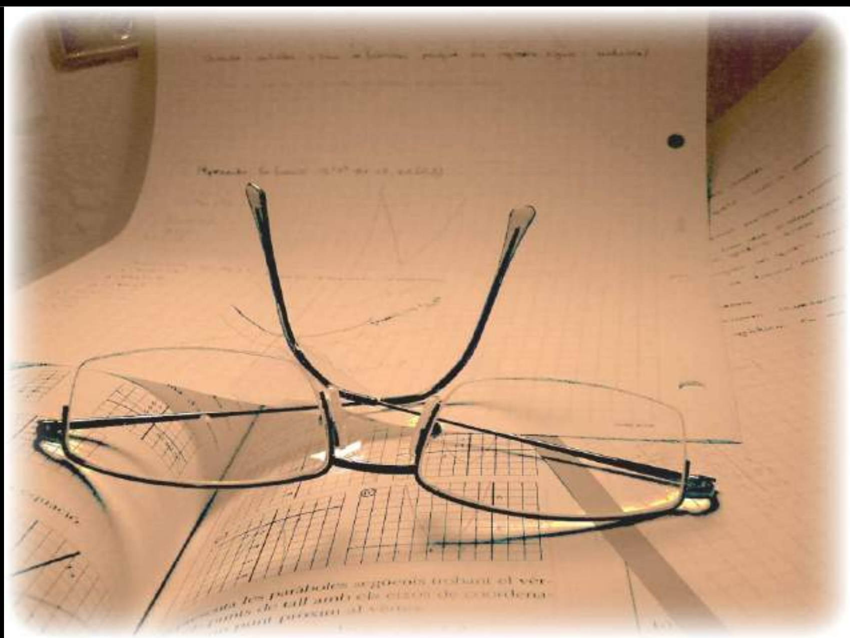
PROVES PAU matemàtiques

2010-2017



Títol: Paràbola convexa
Autor: Francisco Javier Perez Padilla

Material recollit per www.mat3.cat

Maite Gorriz i Santi Vilches

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

Convocatòria 2017

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre λ:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2\lambda x - y + 5\lambda z = 30 \end{cases}$$

a) Estudieu per a quins valors del paràmetre λ el sistema és incompatible.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $\lambda = 1$.
[1 punt]

2. Considereu els plans π_1: $5x - y - 7z = 1$ i π_2: $2x + 3y + z = 5$.

a) Determineu l'equació general (és a dir, la que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa per l'origen de coordenades i és perpendicular als plans π_1 i π_2.
[1 punt]

b) Calculeu l'angle que formen els plans π_1 i π_2.
[1 punt]

3. Sigui la funció $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - k}$, en què k és un paràmetre real diferent de 0. Per als diferents valors del paràmetre k:

a) Calculeu el domini i les asímptotes de la funció.
[1 punt]

b) Calculeu els punts amb un màxim o un mínim relatiu.
[1 punt]

4. Sabem que el sistema d'equacions lineals següent té una única solució:

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ x + az = 1 \\ y + z = a \end{cases}$$

a) Comproveu que $a \neq 0$.

[1 punt]

b) Trobeu la solució del sistema en funció del paràmetre a.

[1 punt]

5. Considereu les matrius quadrades d'ordre 2 de la forma $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{pmatrix}$, amb x i y nombres reals.

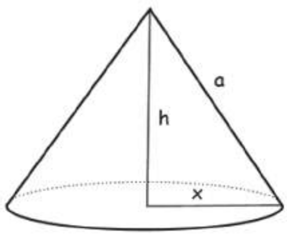
a) Comproveu que la matriu $\boldsymbol{M}$ és sempre invertible, independentment dels valors de x i de y.

[1 punt]

b) Per a $x = 1$ i $y = -1$, calculeu $\boldsymbol{M}^{-1}$.

[1 punt]

6. Considereu un con de $120\,\text{cm}^3$ de volum que té una altura h, un radi de la base x i una aresta a, com el de la figura següent:



a) Comproveu que $a^2 = \dfrac{360}{\pi} \cdot \dfrac{1}{h} + h^2$.

[1 punt]

b) Calculeu l'altura del con que té l'aresta de longitud mínima.

[1 punt]

NOTA: Recordeu que el volum del con és un terç del volum del cilindre recte que té la mateixa base i la mateixa altura que el con.

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Siguin les rectes de $\mathbb{R}^3$ $r\colon \begin{cases} 2x - y = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ i $s\colon\ x + 1 = \dfrac{y-2}{2} = z - 1$.

***a*)** Comproveu que són paral·leles.
[1 punt]

***b*)** Calculeu l'equació vectorial del pla que les conté.
[1 punt]

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + kz = 1 \\ x + (k+1)y + z = k^2 - 4 \end{cases}$$

en què k és un paràmetre real.

***a*)** Discutiu el sistema per als diferents valors de k.
[1 punt]

***b*)** Resoleu el sistema per al cas $k = -2$.
[1 punt]

3. Responeu a les qüestions següents:

***a*)** Comproveu que la recta tangent a la corba $y = x^2$ en el punt d'abscissa $x = 2$ és la recta $y = 4x - 4$ i calculeu els punts d'intersecció d'aquesta recta amb els eixos de coordenades.
[1 punt]

***b*)** Calculeu l'àrea limitada per la corba de l'apartat anterior, la recta tangent en $x = 2$ i l'eix de les abscisses.
[1 punt]

4. Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu les potències $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{A}^3$ i $\boldsymbol{A}^6$.
[1 punt]

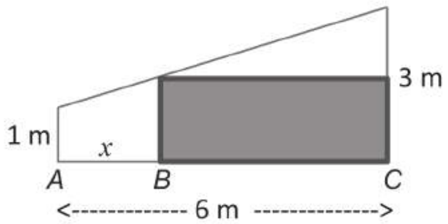
b) Calculeu la inversa de la matriu $\boldsymbol{A}^5$.
[1 punt]

5. Sigui $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$ la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals.

a) Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre a, i interpreteu el resultat geomètricament.
[1 punt]

b) Per a $a = 1$ trobeu la forma paramètrica del pla solució i doneu un punt i dos vectors directors d'aquest pla.
[1 punt]

6. El croquis de sota representa la paret d'unes golfes amb el sostre inclinat, en la qual es vol construir un armari rectangular com el de la zona ombrejada.



a) Expresseu l'àrea del rectangle en funció de la longitud x del segment AB.
[1 punt]

b) Determineu les dimensions del rectangle si volem que tingui una superfície màxima i calculeu aquesta superfície màxima.
[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 2

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu el pla $\pi: x + y + z = 1$ i la recta r que passa pels punts $P = (0, 0, 6)$ i $Q = (1, 2, 3)$.

a) Estudieu la posició relativa de la recta r i el pla π.

[1 punt]

b) Calculeu la distància entre la recta r i el pla π.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

2. Siguin les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que satisfan la igualtat $\boldsymbol{A}^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat d'ordre 3.

[1 punt]

b) Fent servir la igualtat anterior, trobeu la matriu inversa de $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{A}^{-1}$.

[1 punt]

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre real a.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.

[1 punt]

4. De les funcions $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ i $g'(x)$, en coneixem els valors següents:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	2	1
1	0	−6

x	$g(x)$	$g'(x)$
0	1	1
1	3	3

a) De la funció $f(x)$ sabem també que el pendent de la recta tangent a un punt d'abscissa x és $4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$. Trobeu $f(x)$.

[1 punt]

b) Calculeu $(g \circ f)'(1)$.

[1 punt]

5. A $\mathbb{R}^3$, siguin la recta $r: \begin{cases} x - z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$ i el punt $P = (0, 1, -1)$.

a) Calculeu l'equació general (és a dir, la que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla π perpendicular a la recta r i que passa pel punt P.

[1 punt]

b) Calculeu el punt simètric del punt P respecte del pla $x + y + z = -3$.

[1 punt]

6. Sigui la funció $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

a) Calculeu una primitiva de la funció $f(x)$.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea limitada per la funció $f(x)$ i l'eix de les abscisses entre les abscisses $x = 0$ i $x = \dfrac{\pi}{4}$.

[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2016

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Siguin la recta r: $(x, y, z) = (5 + k, k, -2 - 2k)$ i els punts $P = (1, 0, -1)$ i $Q = (2, 1, 1)$.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt Q i és perpendicular al pla determinat per la recta r i el punt P.

[1 punt]

b) Calculeu el punt de la recta r que equidista dels punts P i Q.

[1 punt]

2. Tres nombres, x, y i z, compleixen dues condicions: que el primer és la suma dels altres dos, i que el segon és la suma de la meitat del primer i el doble del tercer.

a) Comproveu que el càlcul dels tres nombres, x, y i z, té una infinitat de solucions.

[1 punt]

b) Trobeu una expressió general de les solucions.

[1 punt]

3. Volem fer un envàs de gelat amb forma de prisma regular de base quadrada i amb una capacitat de $80\,\text{cm}^3$. Per a elaborar-ne la tapa i la superfície lateral, farem servir un material determinat que costa $1\,€/\text{cm}^2$, però per a la base haurem d'utilitzar un material que és un 50 % més car.

a) Si x és la mesura, en cm, del costat de la base, comproveu que la funció que determina el preu de l'envàs és $P(x) = 2{,}5x^2 + \dfrac{320}{x}$.

[1 punt]

b) Calculeu les mides que ha de tenir l'envàs perquè el preu sigui el mínim possible.

[1 punt]

4. Sigui la funció $f(x) = \sin(x)$.

a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la funció f en els punts d'abscissa $x = 0$ i $x = \pi$, respectivament. Trobeu les coordenades del punt en què es tallen les dues rectes.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció f i les rectes tangents de l'apartat anterior (en cas de no haver resolt l'apartat anterior, suposeu que les rectes són $y = x$ i $y = -x + \pi$, respectivament).

[1 punt]

5. Responeu a les qüestions següents:

a) Trobeu l'única matriu de la forma $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ que satisfà que $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, i comproveu que $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$ no són invertibles.

[1 punt]

b) Justifiqueu raonadament que si $\boldsymbol{A}$ és una matriu quadrada d'ordre n diferent de la matriu nul·la, 0, i de la matriu identitat, $\boldsymbol{I}$, i satisfà la igualtat $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, aleshores les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$ no són invertibles.

[1 punt]

6. Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pel punt de coordenades $(0, 0, 1)$ i és perpendicular als plans $3x + y - z = 1$ i $x + y + 2z = 5$.

[1 punt]

b) Suposeu que un pla π_1 és perpendicular a un segon pla π_2 i que el pla π_2 és a la vegada perpendicular a un tercer pla π_3. Expliqueu raonadament si necessàriament els plans π_1 i π_3 han de ser perpendiculars entre ells.

[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2016

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{aligned} 2x+4y+4z&=4k-7 \\ 2x-ky&=-1 \\ -2x&=k+1 \end{aligned}\right\}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre real k.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $k=0$.
[1 punt]

2. A $\mathbb{R}^3$, siguin la recta r que té per equació $(x, y, z) = (1+\lambda, \lambda, 1-\lambda)$ i el pla π d'equació $2x - y + z = -2$.

a) Determineu la posició relativa de la recta r i el pla π.
[1 punt]

b) Calculeu la distància entre la recta r i el pla π.
[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax+By+Cz+D=0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

3. Sigui la funció $f(x) = x\,e^{x-1}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x=1$.
[1 punt]

b) Determineu en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent.
[1 punt]

4. Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu totes les matrius de la forma $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ que satisfan la igualtat $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat, $\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

b) Justifiqueu que si $\boldsymbol{A}$ és una matriu quadrada que compleix la igualtat $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{I}$, aleshores $\boldsymbol{A}$ és invertible, i calculeu l'expressió de $\boldsymbol{A}^{-1}$ en funció de les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{I}$.

[1 punt]

5. Considereu el tetraedre que té per vèrtexs els punts $A = (x, 0, 1)$, $B = (0, x, 1)$, $C = (3, 0, 0)$ i $D = (0, x, 0)$, amb $0 < x < 3$.

a) Comproveu que el volum del tetraedre és donat per l'expressió $V(x) = \frac{1}{6}(-x^2 + 3x)$.

[1 punt]

b) Determineu el valor de x que fa que el volum sigui màxim i calculeu aquest volum màxim.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular el volum del tetraedre de vèrtexs A, B, C i D amb l'expressió

$$\frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|.$$

6. Siguin les paràboles $f(x) = x^2 + k^2$ i $g(x) = -x^2 + 9k^2$.

a) Calculeu les abscisses, en funció de k, dels punts d'intersecció entre les dues paràboles.

[1 punt]

b) Calculeu el valor del paràmetre k perquè l'àrea compresa entre les paràboles sigui de 576 unitats quadrades.

[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2016

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Expliqueu raonadament si les afirmacions següents són vertaderes o falses:

a) Si $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, el sistema és compatible determinat i la solució és $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

b) Si $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, el sistema és compatible indeterminat.

[1 punt]

2. Siguin a $\mathbb{R}^3$ el pla π d'equació $x - y + 2z = 2$ i els punts $A = (3, -1, 2)$ i $B = (1, 1, -2)$.

a) Comproveu que els punts A i B són simètrics respecte del pla π.

[1 punt]

b) Si r és la recta dels punts P que té per equació $P = B + \lambda v$, en què λ és un paràmetre real i $v = (1, 1, 0)$, verifiqueu que els punts mitjans dels segments $\overline{AP}$ pertanyen al pla π.

[1 punt]

3. Responeu a les qüestions següents:

***a*)** Calculeu els màxims relatius, els mínims relatius i els punts d'inflexió de la funció $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

[1 punt]

***b*)** Expliqueu raonadament que si $f(x)$ és una funció amb la derivada primera contínua en l'interval $[a, b]$ i satisfà que $f'(a) > 0$ i $f'(b) < 0$, aleshores hi ha, com a mínim, un punt de l'interval (a, b) en què la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en aquest punt és horitzontal.

[1 punt]

4. Sigui $\boldsymbol{A}$ una matriu quadrada d'ordre n que satisfà la igualtat $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat.

***a*)** Justifiqueu que la matriu $\boldsymbol{A}$ és invertible i que $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$.

[1 punt]

***b*)** Calculeu el valor de a que fa que la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ compleixi la igualtat $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{I}$. Calculeu $\boldsymbol{A}^{-1}$ i comproveu que es correspon amb la matriu calculada a partir del resultat de l'apartat anterior.

[1 punt]

5. Siguin les rectes r: $(x, y, z) = (2, 3, -3) + \lambda(1, -1, 0)$ i $s\colon \dfrac{x-3}{2} = y - 5 = z + 2$.

***a*)** Estudieu si les rectes r i s són paral·leles o perpendiculars.

[1 punt]

***b*)** Determineu la posició relativa de les rectes r i s i calculeu l'equació paramètrica de la recta t que talla perpendicularment la recta r i la recta s.

[1 punt]

6. Sabem que una funció $f(x)$ té per derivada $f'(x) = (x + 1)e^x$ i que $f(0) = 2$.

***a*)** Trobeu l'equació de la recta tangent a $y = f(x)$ en el punt de la corba d'abscissa $x = 0$.

[1 punt]

***b*)** Calculeu l'expressió de $f(x)$.

[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2015

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Sigui la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

a) Determineu per a quins valors de a existeix $\boldsymbol{A}^{-1}$.

[1 punt]

b) Calculeu $\boldsymbol{A}^{-1}$ per a $a = 0$.

[1 punt]

2. A l'espai tridimensional considereu la recta r: $(x, y, z) = (3 + 2\alpha, -\alpha, 3 - \alpha)$ i els plans π_1: $x + y + z = -1$ i π_2: $(x, y, z) = (2 + \lambda, 1 - \lambda + \mu, \mu)$.

a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla π_2.

[1 punt]

b) Trobeu els dos punts de la recta r que equidisten dels plans π_1 i π_2.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3. Sigui la funció $f(x) = e^x - x - 2$.

a) Demostreu que la funció f té una arrel (un zero) en l'interval $[0, 2]$.

[1 punt]

b) Comproveu que la funció és monòtona en l'interval $[0, 2]$ i calculeu les coordenades dels punts mínim absolut i màxim absolut de la funció en aquest interval.

[1 punt]

4. Siguin els plans de $\mathbb{R}^3$ π_1: $-y+z=2$, π_2: $-2x+y+z=1$ i π_3: $2x-2z=-1$.

***a*)** Calculeu la posició relativa dels tres plans.

[1 punt]

***b*)** Comproveu que el pla π_3 és paral·lel a la recta definida per la intersecció dels plans π_1 i π_2.

[1 punt]

5. Siguin x i y les mesures dels costats d'un rectangle inscrit en una circumferència de diàmetre 2.

***a*)** Comproveu que la superfície del rectangle, en funció de x, és donada per l'expressió $S(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$.

[1 punt]

***b*)** Calculeu els valors de les mesures x i y per als quals la superfície del rectangle és màxima i calculeu el valor d'aquesta superfície màxima.

[1 punt]

6. Trobeu totes les matrius de la forma $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ que siguin inverses d'elles mateixes, és a dir, que $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[2 punts]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2015

Matemàtiques

Sèrie 2

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{aligned} -3x+2y+3z&=0 \\ (a-2)y-3z&=0 \\ -x-y+(-a-3)z&=0 \end{aligned}\right\}$$

a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a el sistema té més d'una solució.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $a=-3$.

[1 punt]

2. Sigui r la recta de l'espai que té per equació $r: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=z$ i sigui P el punt de coordenades $(6, 0, -1)$.

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax+By+Cz=D$) del pla que passa pel punt P i talla perpendicularment la recta r.

[1 punt]

b) Trobeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt P i conté la recta r.

[1 punt]

3. Responeu a les qüestions següents:

a) Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $y=x^3$ en el punt d'abscissa $x=2$.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió plana finita limitada per la corba $y=x^3$ i la recta $y=3x-2$.

[1 punt]

4. Considereu a $\mathbb{R}^3$ la recta que té per equació $r\colon (x, y, z) = (-4 + 2\lambda, -2, 1 - \lambda)$ i els plans π_1 i π_2 d'equacions $\pi_1\colon x + 2y + 2z = -1$ i $\pi_2\colon x - 2y + 2z = -3$, respectivament.

***a*)** Determineu la posició relativa de π_1 i π_2.

[1 punt]

***b*)** Comproveu que tots els punts de la recta r estan situats a la mateixa distància dels plans π_1 i π_2.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ amb l'expressió } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5. Responeu a les qüestions següents:

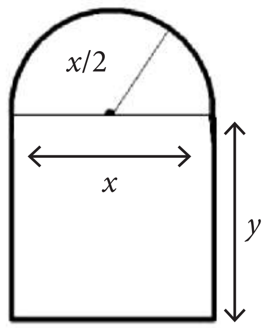
***a*)** Calculeu la matriu de la forma $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que satisfà $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat, $\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

***b*)** Calculeu $\boldsymbol{A}^{-1}$ i comproveu que el resultat es correspon amb el que obteniu de deduir la matriu $\boldsymbol{A}^{-1}$ a partir de la igualtat $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

[1 punt]

6. La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en què x és el diàmetre de la circumferència, és a dir, la distància entre columnes, i y és l'alçària de cada columna.



***a*)** Comproveu que la funció $f(x, y) = \dfrac{\pi x^2}{8} + xy$ determina l'àrea d'aquesta portalada.

[1 punt]

***b*)** Si el perímetre de la portalada fa 20 m, determineu les mides x i y de la portalada que en maximitzen l'àrea.

[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2014

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Siguin r i s les rectes de $\mathbb{R}^3$ que tenen les equacions següents:

$$r: x+5=y-5=\frac{z-3}{2} \text{ i } s: \frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}.$$

a) Estudieu el paral·lelisme i la perpendicularitat entre les rectes r i s.
[1 punt]

b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax+By+Cz=D$) del pla π que conté la recta r i és paral·lel a la recta s. Calculeu la distància entre la recta s i el pla π obtingut.
[1 punt]

2. Siguin les funcions $f(x)=\dfrac{e^{ax}+b}{4}$ i $g(x)=+\sqrt{3x+4}$.

a) Determineu el domini i el recorregut de la funció g.
[1 punt]

b) Calculeu per a quins valors de a i de b les gràfiques de les dues funcions són tangents (és a dir, tenen la mateixa recta tangent) en el punt d'abscissa $x=0$.
[1 punt]

3. Considereu el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} mx-y=m \\ 3x+(m-4)y=m+2 \end{cases}$, per a $m \in \mathbb{R}$.

a) Discutiu el sistema d'equacions per als diferents valors del paràmetre m.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema en aquells casos en què el sistema sigui compatible.
[1 punt]

4. Sabem que una funció f té per derivada la funció $f'(x) = (3x-2)^2\,(x-2)$.

a) Calculeu els valors de x en què la funció f té un màxim relatiu, un mínim relatiu o un punt d'inflexió, i indiqueu en cada cas de què es tracta.

[1 punt]

b) Determineu la funció f sabent que s'anul·la en el punt d'abscissa $x = 2$.

[1 punt]

5. Donats els vectors $\boldsymbol{u} = (2, -1, 0)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 3, 4)$ i $\boldsymbol{w} = (0, 3a-1, 4a)$,

a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè els vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$ siguin linealment dependents.

[1 punt]

b) Calculeu els valors del paràmetre a perquè un tetraedre d'arestes $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$ tingui un volum de 2/3 d'unitats cúbiques.

[1 punt]

6. Considereu l'equació matricial $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, en què

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Per a quins valors del paràmetre a l'equació matricial té una solució única?

[1 punt]

b) Trobeu la matriu $\boldsymbol{X}$ que satisfà l'equació matricial quan $a = 3$.

[1 punt]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2014

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu la matriu $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$, per a $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculeu el rang de la matriu $\boldsymbol{M}$ en funció dels valors del paràmetre a.
[1 punt]

b) Discutiu i resoleu el sistema d'equacions lineals

$$\boldsymbol{M} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

segons els valors del paràmetre a.
[1 punt]

2. Considereu el punt $A = (1, 2, 3)$.

a) Calculeu el punt simètric del punt A respecte de la recta d'equació

$$r: (x, y, z) = (3 + \lambda, 1, 3 - \lambda).$$

[1 punt]

b) Calculeu el punt simètric del punt A respecte del pla que té per equació

$$\pi: x + y + z = 3.$$

[1 punt]

3. Un nedador és al mar en un punt N, situat a 3 km d'una platja recta, i just al davant d'un punt S, situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt A, situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt S, de manera que el triangle NSA és rectangle en el vèrtex S. El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h.

a) Si P és un punt entre el punt S i el punt A que està a una distància x de S, demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt N al punt P i caminar des del punt P fins al punt A és determinat per l'expressió $t(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \dfrac{6-x}{5}$.

[1 punt]

b) Calculeu el valor de x que determina el temps mínim que cal per a anar del punt N al punt A, passant per P. Quin és el valor d'aquest temps mínim?

[1 punt]

4. Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques de les funcions $y = x^2$, $y = 4x^2$ i $y = 9$.

[2 punts]

5. Siguin r i s les rectes de $\mathbb{R}^3$ d'equacions $r\colon \dfrac{x-2}{3} = y = \dfrac{z+1}{4}$ i $s\colon (x, y, z) = (1+2\alpha, 3-\alpha, 4+3\alpha)$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un pla.

[1 punt]

b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla de l'apartat anterior.

[1 punt]

6. Responeu a les qüestions següents:

a) Demostreu que si $\boldsymbol{A}$ és una matriu quadrada que satisfà la igualtat $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$, on $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat, aleshores $\boldsymbol{A}$ és invertible i $\boldsymbol{A}^{-1}$ satisfà $(\boldsymbol{A}^{-1})^2 = \boldsymbol{I}$.

[1 punt]

b) Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ amb $b \neq 0$ que satisfan la igualtat $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$.

[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2014

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$.

a) Calculeu les asímptotes verticals, horitzontals i obliqües de la funció f.

[1 punt]

b) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en aquells punts en què la recta tangent sigui paral·lela a la recta $y=-5x+4$.

[1 punt]

2. Responeu a les qüestions següents:

a) Discutiu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} (k-1)y+(k^2-1)z=0 \\ (4k+1)x-y-7z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

en funció dels valors de k.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per a $k=1$.

[1 punt]

3. Siguin els punts $P=(1, 1, 0)$, $Q=(1, 0, 1)$ i $R=(0, 1, 1)$ i el pla π: $x+y+z=4$.

a) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax+By+Cz=D$) del pla que passa pels punts P, Q i R.

[1 punt]

b) Si S és un punt de π, comproveu que el volum del tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S no depèn del punt S.

[1 punt]

4. Donats els plans π_1: $x - 4y + z = 2m - 1$ i π_2: $2x - (2m + 2)y + 2z = 3m + 1$,

a) Determineu els valors de m perquè els plans π_1 i π_2 s'intersequin en una recta i calculeu un vector director de la recta resultant que no depengui de m.
[1 punt]

b) Sigui el pla π: $3x - 2y + 3z = 8$. Estudieu la posició relativa del pla π amb la recta r definida per la intersecció dels plans π_1 i π_2 quan $m = 1$.
[1 punt]

5. Responeu a les qüestions següents:

a) Si $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ són dues matrius quadrades d'ordre n, demostreu que

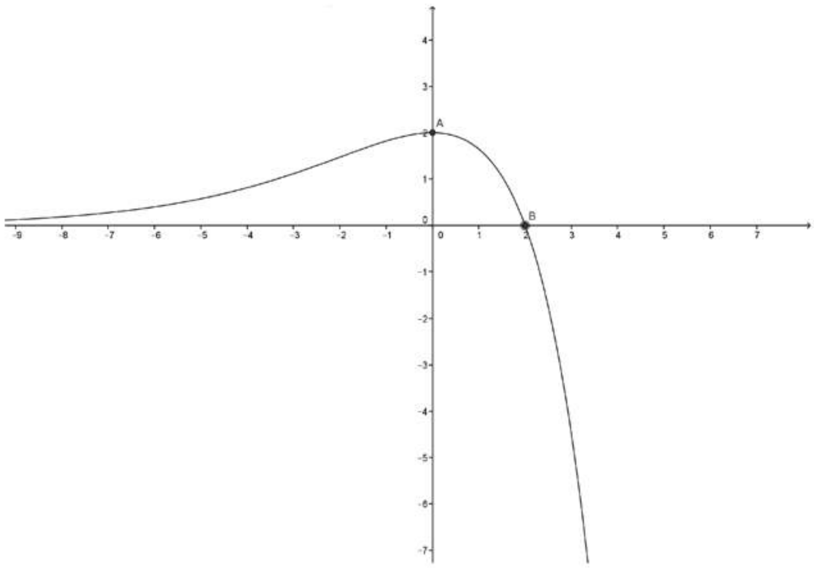
$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}.$$

[1 punt]

b) Si $\boldsymbol{M}_1$ i $\boldsymbol{M}_2$ són dues matrius de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, amb $a, b \in \mathbb{R}$, comproveu que el producte $\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2$ té també la mateixa forma i que $\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{M}_1$.
[1 punt]

6. Responeu a les qüestions següents:

a) La funció $f(x) = (b - x)e^{ax}$, amb a i b constants, té la representació gràfica següent



i sabem que passa pels punts $A = (0, 2)$ i $B = (2, 0)$, i que en el punt A la recta tangent a la gràfica és horitzontal. Calculeu els valors de a i b.
[1 punt]

b) Calculeu $\int_1^2 x \ln x \, dx$.
[1 punt]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Sigui $V = \{(-1, 1, 1), (-2, -1, 0), (1, 2, a)\}$ un conjunt de vectors de $\mathbb{R}^3$.

a) Trobeu el valor o els valors de a perquè V sigui linealment dependent.

b) Quan $a = 4$, expresseu el vector $\vec{v} = (3, 9, 14)$ com a combinació lineal dels vectors de V.

[1 punt per cada apartat]

2. De la funció polinòmica $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ sabem que

— té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -3$;

— la integral definida en l'interval $[0, 1]$ val $-\dfrac{5}{4}$.

Calculeu el valor dels paràmetres a i b.

[2 punts]

3. Donats el pla π: $x + 2y - z = 3$ i la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z+m}{4}$,

a) Comproveu que el vector característic (o normal) de π i el vector director de r són perpendiculars.

b) Estudieu la posició relativa de π i r en funció del paràmetre m.

[1 punt per cada apartat]

4. Siguin les matrius

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & 4 \\ 3 & c & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & b & 8 \\ 1 & c & 3 \\ 4 & a & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 5 \\ -b & -a & -2 \end{bmatrix},$$

on a, b i c són paràmetres reals. Calculeu el valor d'aquests paràmetres perquè cap de les tres matrius tingui inversa.

[2 punts]

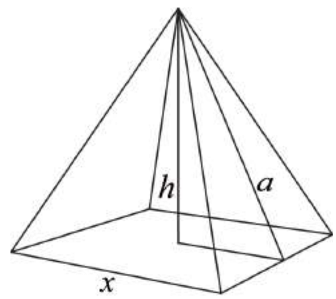
5. Donats el pla π: $2x - y + 3z - 8 = 0$ i el punt $P = (6, -3, 7)$,

a) Trobeu l'equació contínua de la recta que passa per P i és perpendicular a π.

b) Trobeu el punt del pla π que està més proper al punt P.

[1 punt per cada apartat]

6. Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Disposem de 300 m^2 de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem x la longitud d'un costat de la base de la tenda.



a) Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas,

$$V(x) = \frac{x\sqrt{(9 \times 10^4) - x^4}}{6}$$

b) Determineu el valor de x perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).

[1 punt per cada apartat]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Sabem que el vector (2, 1, −1) és una solució del sistema

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= a + c \\ bx - y + bz &= a - b - c \\ cx - by + 2z &= b \end{aligned}\right\}$$

Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c.

[2 punts]

2. La corba $y = x^2$ i la recta $y = k$, amb $k > 0$, determinen una regió plana.

***a*)** Calculeu el valor de l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre k.

***b*)** Trobeu el valor de k perquè l'àrea limitada sigui $\sqrt{6}\,u^2$.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

3. Sigui $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

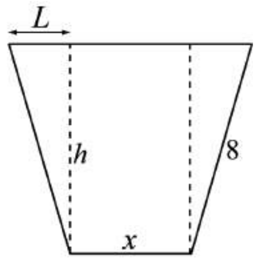
***a*)** Què significa que la matriu $\boldsymbol{B}$ sigui la matriu inversa de $\boldsymbol{A}$?

***b*)** Trobeu el valor del paràmetre p perquè la matriu inversa de $\boldsymbol{A}$ i la matriu transposada de $\boldsymbol{A}$ coincideixin.

NOTA: No aproximeu les arrels mitjançant valors amb decimals; treballeu amb els radicals.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

4. Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres. A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.



a) Trobeu el valor del segment L de la gràfica en funció de la variable x (amplària inferior del canal).

b) Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per

$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}$$

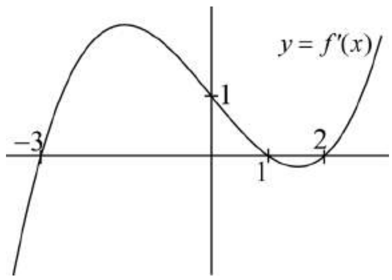
c) Calculeu el valor de x perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).

[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*]

5. Donats els punts $P = (1, 0, -1)$ i $Q = (-1, 2, 3)$, trobeu un punt R de la recta $r: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$ que compleixi que el triangle de vèrtexs P, Q i R és isòsceles, en què $\overline{PR}$ i $\overline{QR}$ són els costats iguals del triangle.

[2 punts]

6. La funció $f(x)$ és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent $f'(x)$ creixent als intervals $(-\infty, -3]$ i $[2, +\infty)$.



a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.

b) Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció $f(x)$ i classifiqueu aquests extrems.

[1 punt per cada apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Sigui π: $3x - 2y + z = 10$.

a) Trobeu l'equació contínua de la recta r perpendicular a π que passa pel punt $P = (-1, 3, 2)$.

b) Trobeu també l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π_1 paral·lel a π que passa pel mateix punt P.

[1 punt per cada apartat]

2. Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix}$. Sigui $\boldsymbol{I}$ la matriu identitat d'ordre 2.

a) Trobeu el valor del paràmetre a perquè es compleixi que $\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

b) Calculeu la matriu inversa de la matriu $\boldsymbol{A}$ quan $a = -2$.

[1 punt per cada apartat]

3. Donada la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$ i la recta horitzontal $y = k$, amb $k > 0$,

a) Feu un esbós del recinte limitat per les gràfiques de la funció i la recta, i els eixos de coordenades.

b) Trobeu el valor de k sabent que l'àrea d'aquest recinte és igual a 14/3.

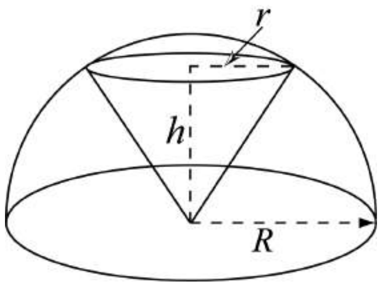
[0,5 per l'apartat *a*; 1,5 per l'apartat *b*]

4. Un triangle d'àrea 3/2 té dos dels vèrtexs als punts $P = (0, 0, 0)$ i $Q = (2, 0, 1)$. El tercer vèrtex, R, és un punt de la recta

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

i té la primera coordenada no nul·la. Calculeu les coordenades del vèrtex R.
[2 punts]

5. En una semiesfera de radi R inscrivim un con situant el vèrtex al centre de la semiesfera, tal com es veu en el dibuix.



***a*)** Sabent que el volum d'un con és igual a l'àrea de la base multiplicada per l'altura i dividida per 3, comproveu que, en aquest cas, podem expressar el volum com

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3}(R^2 - h^2)$$

***b*)** Trobeu les dimensions d'aquest con (el radi de la base i l'altura) perquè el seu volum sigui màxim i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

6. Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta r: $y = x + 3$ en el punt d'abscissa $x = -1$, i que en el punt d'abscissa $x = 1$ la recta tangent és paral·lela a la recta r.
Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c.
[2 punts]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Siguin π_1 el pla $2x + 3y - z = 4$ i π_2 el pla $x - 2y - 4z = 10$.

a) Comproveu que els plans π_1 i π_2 són perpendiculars.

b) Trobeu l'equació contínua de la recta paral·lela als plans π_1 i π_2 i que passa pel punt $P = (-1, 3, 2)$.

[1 punt per cada apartat]

2. La matriu de coeficients d'un sistema d'equacions lineals homogeni és

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{bmatrix}$$

a) Per a quins valors del paràmetre a el sistema té una sola solució? Quina és aquesta solució única?

b) Resoleu el sistema si $a = 2$.

[1 punt per cada apartat]

3. Donats els punts $P = (1, -1, 2)$, $Q = (2, 0, 1)$ i $R = (3, 2, -1)$,

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que determinen.

b) Trobeu un punt S pertanyent a la recta $r: \frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{-3}$, de manera que el tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S tingui un volum igual a 1/2.

[1 punt per cada apartat]

4. Per a $x \geq 1$, considereu la funció $f(x) = +\sqrt{x-1}$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa igual a 10.

b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x)$, la recta d'equació $x = 5$ i l'eix OX.

[1 punt per cada apartat]

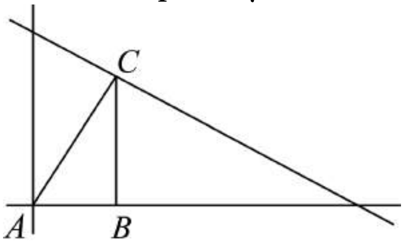
5. Considereu els punts $A = (-1, 2, 4)$ i $B = (3, 0, -2)$.

a) Trobeu l'equació del pla format per tots els punts que equidisten de A i B.

b) Donat un punt $C = (x, y, z)$, dividim el segment $\overline{AC}$ en tres parts iguals i obtenim els punts A, A_1, B i C. Trobeu el punt C.

[1 punt per cada apartat]

6. Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex A en l'origen de coordenades, el vèrtex $B = (x, 0)$ en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtex C pertany a la recta $x + 2y = 8$. L'angle recte és el que correspon al vèrtex B.



a) Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar de la manera següent: $A(x) = 2x - \dfrac{x^2}{4}$.

b) Trobeu els vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

[1 punt per cada apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2011-2012

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Determineu el rang de la matriu $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 1 & k & 1\\ k & 1 & 1\end{pmatrix}$ en funció del paràmetre k.
[2 punts]

2. Sigui $f(x)=\dfrac{ax^2}{x+b}$, en què $a\neq 0$.

a) Determineu si té alguna asímptota vertical, en funció del paràmetre b.
b) Indiqueu el valor dels paràmetres a i b perquè la funció $f(x)$ tingui la recta $y=2x-4$ com a asímptota obliqua a $+\infty$.
[1 punt per cada apartat]

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{aligned} x+y-3z&=2\\ 2x+ay-5z&=2a+3\\ 2x-3y+(a-2)z&=9 \end{aligned}\right\}$$

a) Calculeu el valor o els valors del paràmetre a per al qual o per als quals el sistema és compatible indeterminat.
b) Quantes solucions té aquest sistema quan $a=-3$?
[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

4. Una fàbrica produeix diàriament x tones d'un producte A i $(40-5x)/(10-x)$ tones d'un producte B. La quantitat màxima de producte A que es pot produir és 8 tones. El preu de venda del producte A és 100€ per tona i el del producte B és 250€ per tona.

a) Construïu la funció de la variable x que ens proporciona els ingressos diaris, suposant que es ven tota la producció.

b) Calculeu quantes tones de cada producte s'han de produir diàriament per a obtenir el màxim d'ingressos, i comproveu que és realment un màxim relatiu.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

5. Considereu les rectes de l'espai següents:

$$r: \frac{x+1}{2} = y-1 = \frac{z-1}{-1}, \quad s: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

a) Comproveu que són secants.

b) Calculeu l'equació contínua de la recta que les talla i que és perpendicular a totes dues.

[1 punt per cada apartat]

6. Donades la recta $y = ax + 1$ i la paràbola $y = 3x - x^2$,

a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè siguin tangents.

b) Calculeu els punts de tangència.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2011-2012

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Digueu per a quin valor del paràmetre m els plans

$$\pi_1: x - y + mz = 1,\ \pi_2: x - y + z = m \text{ i } \pi_3: my + 2z = 3$$

tenen com a intersecció una recta.

[2 punts]

2. Donades la recta $y = 3x + b$ i la paràbola $y = x^2$,

a) Calculeu l'abscissa del punt on la recta tangent a la paràbola és paral·lela a la recta donada.

b) Calculeu el valor del paràmetre b perquè la recta sigui tangent a la paràbola.

[1 punt per apartat]

3. Donats el pla $\pi: x - y + 2z - 5 = 0$ i la recta $r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$,

a) Calculeu el punt d'intersecció entre el pla i la recta.

b) Trobeu l'equació contínua de la recta s continguda en el pla π, que és perpendicular a la recta r i talla la recta r.

[1 punt per apartat]

4. Donades les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

a) Comproveu que es compleix la igualtat $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$.

b) És certa aquesta igualtat per a qualsevol parell de matrius quadrades ***A*** i ***B*** del mateix ordre? Responeu raonadament utilitzant les propietats generals de les operacions entre matrius, sense utilitzar matrius ***A*** i ***B*** concretes.

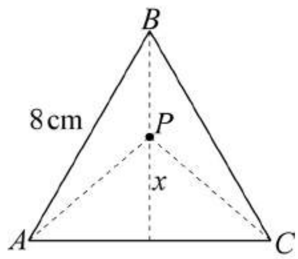
[1 punt per apartat]

5. Un triangle equilàter de vèrtexs A, B i C té els costats de 8 cm. Situem un punt P sobre una de les altures del triangle, a una distància x de la base corresponent.

a) Calculeu l'altura del triangle de vèrtexs A, B i C.

b) Indiqueu la distància del punt P a cadascun dels vèrtexs (en funció de x).

c) Determineu el valor de x perquè la suma dels quadrats de les distàncies del punt P a cadascun dels tres vèrtexs sigui mínima.



[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*]

6. Donats els punts $P=(1, 0, 0)$, $Q=(0, 2, 0)$, $R=(0, 0, 3)$ i $S=(1, 2, 3)$,

a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del pla que conté els punts P, Q i R.

b) Comproveu si els quatre punts són coplanaris (és a dir, si els quatre estan continguts en un mateix pla).

[1 punt per apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2011-2012

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

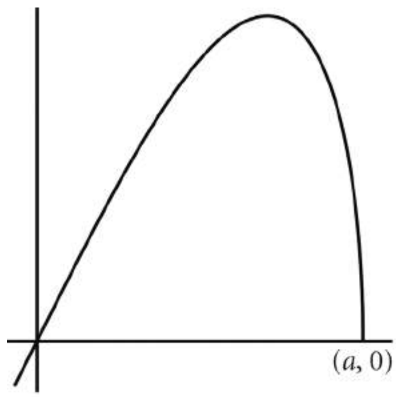
1. Donats els plans $\pi_1: 3x+y-2z+15=0$ i $\pi_2: x+y+2z-103=0$,

***a*)** Comproveu que són perpendiculars.

***b*)** Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del pla perpendicular a π_1 i π_2, que passa pel punt $P=(1, 3, 2)$.

[1 punt per cada apartat]

2. La gràfica de la funció $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$ és la següent:



***a*)** Trobeu el punt de tall, $(a, 0)$, de la funció amb la part positiva de l'eix *OX*.

***b*)** Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x)$ i l'eix *OX* en el primer quadrant.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

3. Sigui $\boldsymbol{A}$ una matriu quadrada d'ordre n de manera que $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$, en què $\boldsymbol{O}$ és la matriu nul·la (la formada completament per zeros).

a) Comproveu que $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n)^2 = 2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n$.

b) Comproveu que les matrius $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n$ són l'una inversa de l'altra.

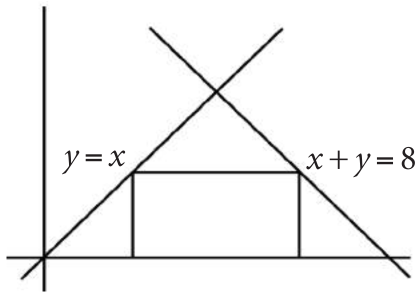
[1 punt per cada apartat]

4. Un rectangle és inscrit en el triangle que té els costats en les rectes d'equacions

$$y = x, \quad x + y = 8, \quad y = 0,$$

i té un costat sobre la recta $y = 0$. Trobeu-ne els vèrtexs perquè la superfície sigui màxima.

[2 punts]



5. Contesteu les preguntes següents:

a) Expliqueu raonadament si una matriu d'ordre 3 i una matriu d'ordre 2 poden tenir el mateix determinant.

b) Considereu les matrius següents:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & 1-p & 2 \\ 1 & 2 & p \end{pmatrix} \text{ i } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}$$

Calculeu, si és possible, el valor del paràmetre p perquè $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B}$.

[1 punt per cada apartat]

6. Siguin $\pi: x - 3y + 2z = 1$ i $r: \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y + mz = 1 \end{cases}$. Estudieu-ne la posició relativa segons el valor del paràmetre m.

[2 punts]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2010-2011

Matemàtiques

Sèrie 2

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Donada la matriu $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$:

a) Calculeu els valors del paràmetre k per als quals la matriu $\boldsymbol{M}$ no és invertible.
b) Per a $k=0$, calculeu $\boldsymbol{M}^{-1}$.

[1 punt per cada apartat]

2. Donada la recta $\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{aligned}\right\}$, calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla perpendicular a la recta que passa pel punt $P = (1, 0, -1)$.

[2 punts]

3. Donada la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$:

a) Determineu la relació que han de complir els paràmetres a, b i c perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$.
b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè hi hagi un punt d'inflexió de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.
c) Determineu la relació entre els paràmetres a, b i c sabent que la gràfica de $f(x)$ talla l'eix OX en el punt d'abscissa $x = -2$.
d) Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c perquè es compleixin les tres propietats anteriors alhora.

[0,5 punts per cada apartat]

4. Sigui la matriu $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu $\boldsymbol{A}^2$ i $\boldsymbol{A}^3$.
b) Deduïu el valor de $\boldsymbol{A}^{101}$.
NOTA: Treballeu amb radicals; no utilitzeu la representació decimal dels elements de la matriu.
[1 punt per cada apartat]

5. Considereu la recta $r: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=z-a$ i el pla $\pi: 2x+y-5z=5$.

a) Estudieu la posició relativa de la recta r i el pla π en funció del paràmetre a.
b) Quan $a=3$, calculeu la distància de la recta r al pla π.
[1 punt per cada apartat]

6. Sigui $f(a)=\int_0^{1/a}(a^2+x^2)dx$ per $a>0$.

a) Comproveu que $f(a)=\dfrac{1}{3a^3}+a$.

b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè la funció $f(a)$ tingui un mínim relatiu.
[1 punt per cada apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2010-2011

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Donada la recta $r:\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$:

a) Trobeu-ne un vector director.

b) Calculeu l'equació contínua de la recta paral·lela a r que passa pel punt $P = (1, 0, -1)$.

[1 punt per cada apartat]

2. Si tenim la matriu invertible $\boldsymbol{A}$ i l'equació matricial $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$:

a) Aïlleu la matriu $\boldsymbol{X}$.

b) Trobeu la matriu $\boldsymbol{X}$ quan $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

[1 punt per cada apartat]

3. Definim les funcions $f(x) = a(1 - x^2)$ i $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{a}$, en què $a > 0$.

a) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de les funcions és:

$$\frac{4(1+a^2)}{3a}$$

b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè aquesta àrea sigui mínima.

[1 punt per cada apartat]

4. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - az &= -3 \\ 2x + (a-5)y + z &= 4a + 2 \\ 4x + (a-1)y - 3z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè el sistema no sigui compatible determinat.

b) Hi ha algun valor de a per al qual $x=1$, $y=-3$, $z=-1$ sigui l'única solució del sistema?

[1 punt per cada apartat]

5. Siguin $r_1 : x - 2 = \frac{y-3}{2} = \frac{1-z}{2}$ i $r_2 : \frac{x+3}{2} = y + 1 = \frac{z+1}{2}$.

a) Comproveu que r_1 i r_2 són perpendiculars.

b) Comproveu que es tallen mitjançant la determinació del punt de tall.

[1 punt per cada apartat]

6. Sigui $f(x) = x^2 \cdot e^{-ax}$ quan $a \neq 0$.

a) Calculeu el valor de a perquè aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=2$.

b) Quan $a=2$, classifiqueu-ne els extrems relatius.

[1 punt per cada apartat]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2010-2011

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Calculeu l'àrea del recinte limitat per les corbes d'equació $f(x)=x^2-x+2$ i $g(x)=5-3x$.

[2 punts]

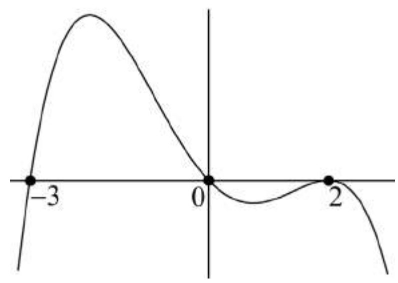
2. Donat el pla $\pi: 2x+y-z=5$:

a) Calculeu l'equació del pla paral·lel al pla π que passa pel punt $P=(1, 0, -1)$.

b) Determineu també la distància entre el punt P i el pla π.

[1 punt per cada apartat]

3. La gràfica corresponent a la derivada d'una funció $f(x)$ és la següent:



a) Expliqueu raonadament quins valors de x corresponen a màxims o a mínims relatius de $f(x)$.

b) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

4. Analitzeu, segons els valors del paràmetre k, el caràcter (és a dir, si és compatible o no i si és determinat o no) del sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} 2x + y - z = k - 4 \\ (k-6)y + 3z = 0 \\ (k+1)x + 2y = 3 \end{cases}$$

[2 punts]

5. Calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) dels plans que contenen la recta $r: \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ i que formen un angle de 45° amb el pla $z=0$.

[2 punts]

6. Dins d'un triangle rectangle, de catets 3 i 4 cm, hi ha un rectangle. Dos costats del rectangle estan situats en els catets del triangle i un dels vèrtexs del rectangle és a la hipotenusa del triangle.

a) Feu un esbós de la situació descrita.

b) Si x és la longitud del costat del rectangle que està situat en el catet petit i y és l'altre costat del rectangle, comproveu que es compleix que $4x+3y=12$.

c) Determineu les dimensions del rectangle perquè l'àrea sigui màxima.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2009-2010

Matemàtiques

Sèrie 2

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Trobeu les asímptotes de la funció $f(x) = \dfrac{3x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4x - 5}$.
[2 punts]

2. Donats el pla $\pi: 5x + y + 3z = 4$ i la recta $r: \begin{cases} ax - y = 2 \\ 2y + z = -3 \end{cases}$, estudieu-ne la posició relativa en funció del paràmetre a.
[2 punts]

3. Considereu tots els prismes rectes de base quadrada amb un volum V fixat. Anomeneu x el costat de la base del prisma i y la seva altura.
a) Trobeu l'expressió del volum i de l'àrea total del prisma en funció de les variables x i y.
b) Comproveu que el que té àrea total mínima és en realitat un cub.
[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

4. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.
a) Comproveu que compleix la igualtat $A^2 - 5A = I_2$, on I_2 és la matriu identitat d'ordre 2.
b) Utilitzeu aquesta igualtat per a calcular la matriu inversa de A.
c) Resoleu l'equació matricial $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, utilitzant la matriu inversa de A.
[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,75 punts per l'apartat *b*; 0,75 per l'apartat *c*]

5. Sigui $f(x)=\dfrac{8x^2}{2x+1}$. Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica d'aquesta funció, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 2$.

[2 punts]

6. Considereu la recta $r\colon \dfrac{x+4}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=z-1$.

a) Trobeu els dos punts, A i B, de la recta r que estan situats a una distància $d=\sqrt{6}$ del punt $P = (-1, 1, 2)$.

b) Trobeu l'àrea del triangle de vèrtexs A, B i P.

[1 punt per cada apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2009-2010

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que conté la recta $r_1: \dfrac{x-1}{2} = y = 2 - z$ i és paral·lel a la recta $r_2: \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

[2 punts]

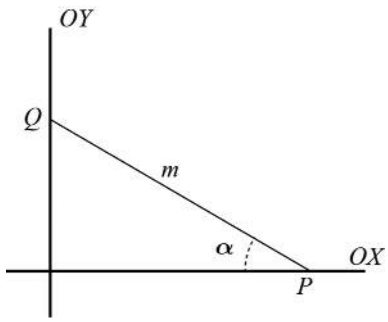
2. Donat el sistema d'equacions lineals $\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= -1 \\ 2x + y + z &= 4 \\ x - y + (p-3)z &= 5 \end{aligned}\right\}$:

a) Estudieu-ne el caràcter (és a dir, si és compatible o no i si és determinat o no) en funció del paràmetre p.

b) Comproveu que si $p \neq 5$ la solució del sistema no depèn del valor d'aquest paràmetre.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

3. Un segment de longitud fixada m recolza sobre els eixos de coordenades. Calculeu el valor de l'angle α que forma el segment amb l'eix OX perquè el triangle rectangle determinat pel segment amb els eixos i del qual m és la hipotenusa tingui àrea màxima. Comproveu que es tracta realment d'un màxim.



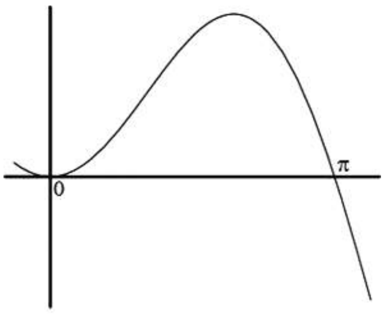
[2 punts]

4. Donades les rectes $r_1 : \dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-4}$ i $r_2 : \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - y + z + 11 = 0 \end{cases}$:

a) Comproveu que són paral·leles.
b) Trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que les conté.

[1 punt per cada apartat]

5. La gràfica de la funció $f(x) = x \cdot \sin(x)$ és la següent:



a) Trobeu-ne una primitiva.
b) Aplicant el resultat de l'apartat anterior, calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses des de $x = 0$ fins a $x = \pi$.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

6. Sigui $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de les variables x i y perquè es compleixi que $A^2 = A$.

[2 punts]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2009-2010

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Donats el pla $\pi: x + 2y + 3z - 4 = 0$ i els punts $P = (3, 1, -2)$ i $Q = (0, 1, 2)$:

***a*)** Calculeu l'equació contínua de la recta perpendicular al pla π que passa pel punt P.

***b*)** Calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla perpendicular a π que passa pels punts P i Q.

[1 punt per cada apartat]

2. Considereu la igualtat matricial $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

***a*)** Comproveu si les matrius $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ compleixen o no la igualtat anterior.

***b*)** En general, donades dues matrius qualssevol A i B quadrades del mateix ordre, expliqueu raonadament si hi ha alguna condició que hagin de complir perquè la igualtat de l'enunciat sigui certa.

[1 punt per cada apartat]

3. Sigui $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomi qualsevol de segon grau.

***a*)** Trobeu la relació existent entre els paràmetres a, b i c sabent que es compleix que $P(1) = 0$ i $P(2) = 0$.

***b*)** Quan es compleix la condició anterior, indiqueu quins valors pot tenir $P'(3/2)$.

[1 punt per cada apartat]

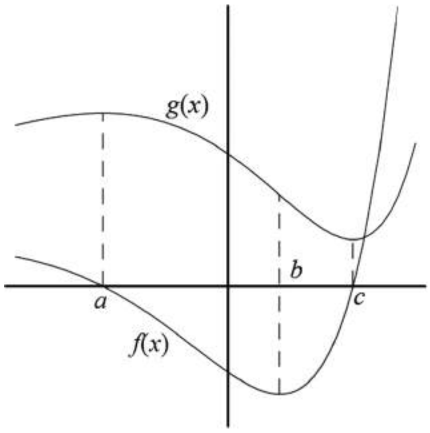
4. Hem escalonat la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, $A \cdot X = b$, i hem obtingut:

$$(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & a+2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 3 \end{array}\right)$$

a) Discutiu aquest sistema en funció del paràmetre a.
b) Resoleu-lo quan $a = 2$.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

5. En la figura següent es representen dues funcions. L'una és la derivada de l'altra. Decidiu si la funció $f(x)$ és la derivada de la funció $g(x)$ o és a l'inrevés, estudiant què passa en els punts $x = a$, $x = b$ i $x = c$.



[2 punts]

6. Siguin $\vec{u}_1 = (-1, 3, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, 4)$ i $\vec{u}_3 = (a + 1, a - 1, 4a + 2)$ tres vectors de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$.
a) Trobeu el valor del paràmetre a per al qual el vector $\vec{u}_3$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$.
b) Comproveu que per a $a = 0$ el conjunt $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és linealment independent.

[1 punt per cada apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2009-2010

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu un sistema qualsevol de dues equacions amb tres incògnites. Responeu raonadament a les qüestions següents:

a) És possible que el sistema considerat sigui compatible determinat?

b) Pot ser incompatible?

[1 punt per cada apartat]

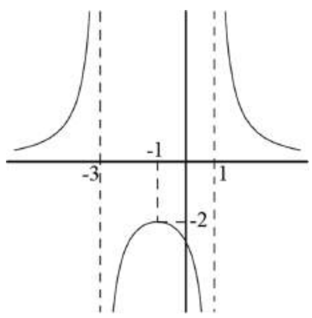
2. Donats el punt $P = (1, 0, -2)$ i la recta $r: \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+3}{-3}$:

a) Trobeu l'equació contínua de la recta que passa pel punt P i talla perpendicularment la recta r.

b) Calculeu la distància del punt P a la recta r.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

3. Determineu el valor dels paràmetres a, b i c perquè la gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{a}{x^2 + bx + c}$ sigui la següent:



[2 punts]

4. Siguin A, B i C matrius quadrades d'ordre n.

a) Expliqueu raonadament si és possible que $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ i $\det (A \cdot B) = 0$. Si és possible, poseu-ne un exemple.

b) Si sabem que $\det A \neq 0$ i que $A \cdot B = A \cdot C$, expliqueu raonadament si podem assegurar que $B = C$.

[1 punt per cada apartat]

5. Siguin r i s dues rectes d'equacions

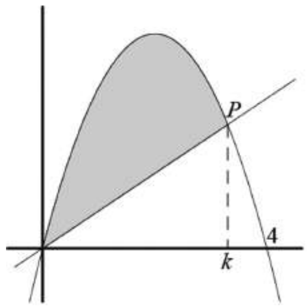
$$r: (x, y, z) = (-4, 3, 4) + t(2, -1, 1)\ , \quad s: x + 1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-a}{3}\cdot$$

a) Trobeu el valor del paràmetre a perquè aquestes rectes es tallin.

b) En el cas en què es tallen, trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que les conté.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

3. En la figura es mostra la corba $y = x(4 - x)$ i una recta r que passa per l'origen i talla la corba en un punt P d'abscissa k, amb $0 < k < 4$.



a) Trobeu l'àrea ombrejada, delimitada per la corba i la recta, en funció de k.

b) Trobeu per a quin valor de k l'àrea de la regió ombrejada és la meitat de l'àrea del recinte limitat per la corba i l'eix OX.

[1 punt per apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés