CONSTRUÏM UNA PISTA D'SKATE POLINÒMICA

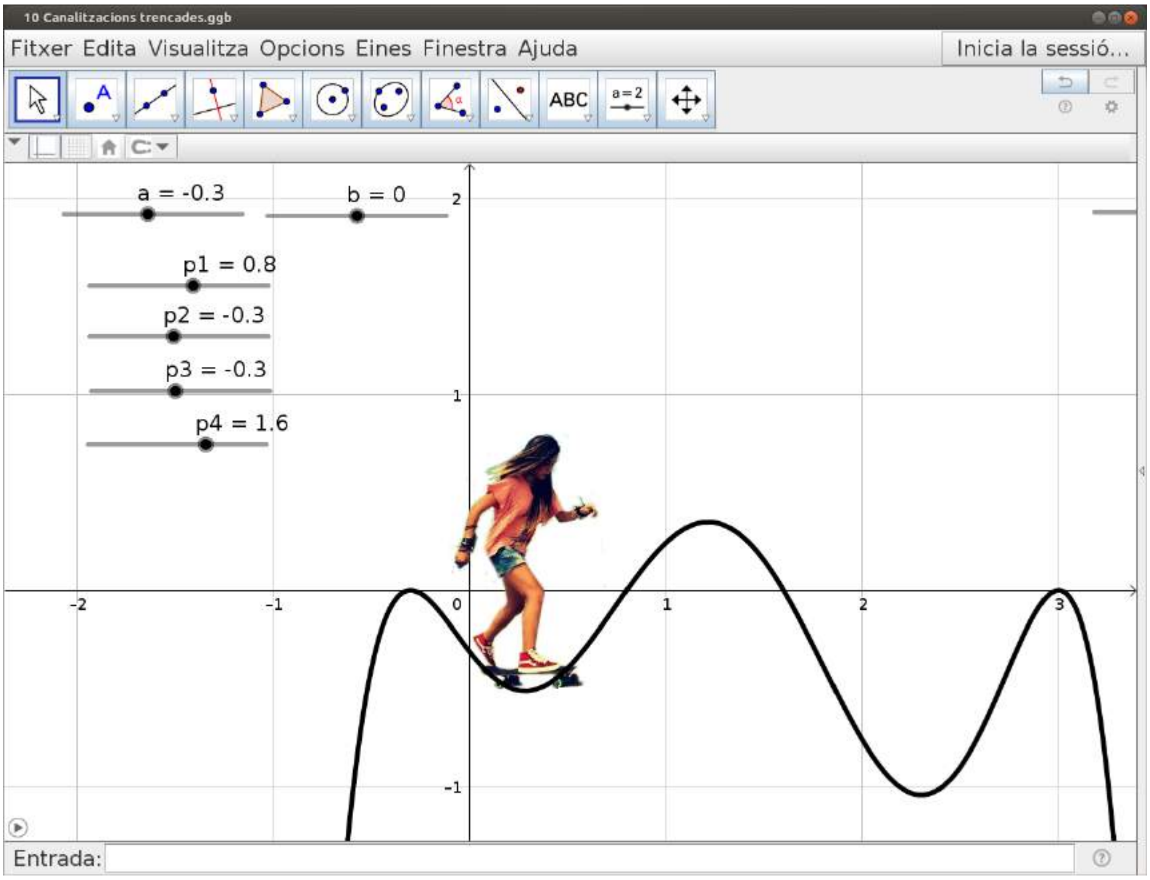
Guia de treball

Continuació de la paràbola
Xavier Puig Sedano

Material elaborat per www.mat3.cat
Maite Gorriz i Santi Vilches

INTRODUCCIÓ

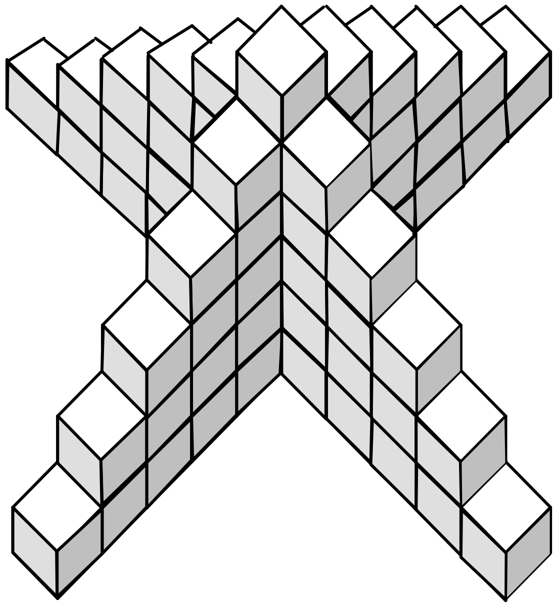
Les matemàtiques són la eina més poderosa per a poder desenvolupar la creativitat personal, hi ha gran quantitat de eines que s'utilitzen habitualment en els dissenys d'objectes, l'arquitectura, l'art,.... En aquest dossier us proposem un repte emocionant, dissenyar i crear una pista d'skate. Cada u de vosaltres haurà de dissenyar i construir a escala la vostra pròpia pista i haurà d'encapsular-la en una petita fórmula: **un polinomi**. Quan acabeu la feina trieu la pista més «guai» de totes i presentau-la a l'ajuntament. Demaneu que la construeixin al vostre poble.



Però per a poder fer una tasca tant interessant i creativa hem de conèixer molt bé quins son els budells matemàtic que amaguen aquests objectes tant misteriosos, els polinomis. Ànim i a per feina!!!!!

A. Activitat introductòria

A.1. Observeu aquesta torre:



a) Quants cubs són necessaris per a construir una torre com aquesta però només de 3 cups d'alçada? I de 4?

b) Quants cubs són necessaris per a construir una torre de 5 cubs d'alçada?

c) Quants en necessites si fa 7 cubs d'alçada? I per a 8 cubs d'alçada?

d) Quants en necessites si fa 12 cubs d'alçada?

e) Quants en necessites si fa 10 000 cubs d'alçada?

f) Expliqueu raonadament l'estratègia que heu utilitzat per arribar a trobar la solució de la pregunta e. Podeu utilitzar dibuixos.

g) Utilitzant l'estratègia que acabeu de raonar intenteu trobar la fórmula general que permeti trobar la quantitat de cubs per una alçada qualsevol de n cubs.

h) Compareu la fórmula amb la dels companys.

i) Simplifiqueu al màxim la fórmula que us ha sortit i comproveu que funciona amb les torres petites de 5, 6, 7 cubs d'alçada.

j) Calculeu l'alçada si la torre té 24531 cubs.

B. Una mica d'història del càlcul

Numeració romana:

I	1		
V	5	$\overline{V}$	5.000
X	10	$\overline{X}$	10.000
L	50	$\overline{L}$	50.000
C	100	$\overline{C}$	100.000
D	500	$\overline{D}$	500.000
M	1000	$\overline{M}$	1.000.000

B.1. Quins nombres són:

a) XXXIII =
b) XXVII =
c) LVIII =
d) XIX =
e) CDLXXIV =

B.2. Escriu amb numeració romana:

a) 15
b) 349 =
c) 2345 =
d) 34589 =
e) 291 =

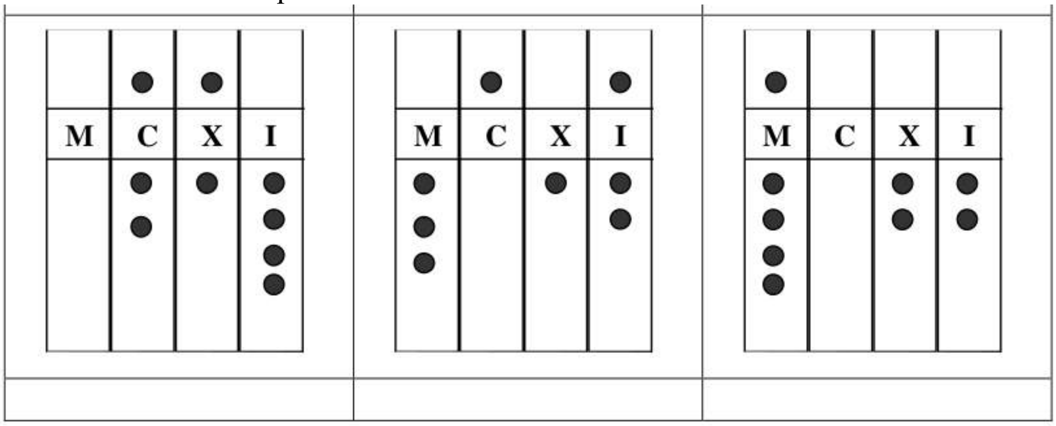
B.3. Suma XXVII + LVIII utilitzant pedres (o fitxes)

a) Opció 1: Agafem XXVII pedres i LVIII pedres i les contem juntes.
b) Opció 2: agrupem les pedres de 5 en 5 o de 10 en 10

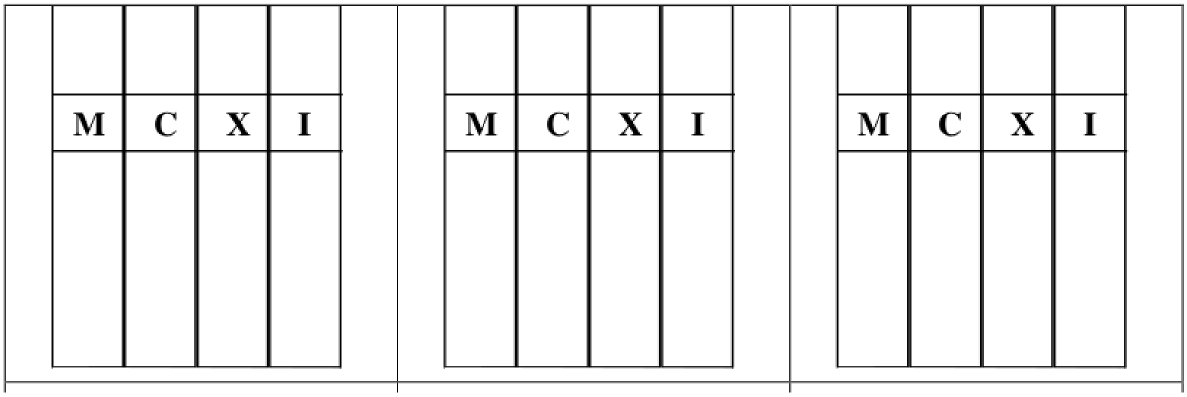
B.4. Fes la operació anterior amb nombres romans

L'àbac romà era l'estri més utilitzat per calcular, podríem dir que era la calculadora de l'època romana. Aquí en pots veure una imatge:

B.5. Escriu els nombres que estan escrits a l'àbac



B.6. Escriu a l'àbac els nombres 68, 239 i 2735



B.7. Practica amb el Geogebra i obté 10 punts! https://www.geogebra.org/m/nJuH9SVG

B.8. Fes l'operació de l'exercici B.3 amb l'àbac romà

B.9. Fes ara CCCV+XLXXIX utilitzant l'àbac

B.10. Per practicar una mica més amb l'àbac suma: 487 + 254 i ho escrius amb números romans.

C. Escriptura polinòmica

C.1. Si X = 10 podem escriure XXXV (= 35) = 3X + 5 perquè s'ajusta a la representació de l'àbac.

a) Fes un dibuix a l'àbac de 35
b) Escriu CCCV com hem fet amb el 35 i fes un dibuix a l'àbac
c) Fes el mateix amb DLXIV
d) També amb 12490
e) I per acabar, 200640

Quan escrivim un nombre, de fet estem fent servir **notació polinòmica**:

$$4327 = 4 \text{ mil} + 3 \text{ cents} + 2 \text{ desenes} + 7 \text{ unitats} =$$
$$= 4\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 2\cdot10^1 + 7\cdot10^0 =$$
$$= 4X^3+3X^2+2X^1+7X^0$$

C.2. Fes MMXXV + MMMDIIIX amb àbac i amb notació polinòmica

C.3. Fes 348 + 2052 amb notació polinòmica

C.4. Explica amb les teves paraules com sumes amb notació polinòmica

C.5. Ara intentarem multiplicar amb àbac i notació polinòmica. Comença per multiplicar 3 per 475:

a) Escriu 3 vegades 475 i suma
b) Fes 3 vegades 5, 3 vegades $7\cdot X$ i 3 vegades $4\cdot X^2$ i junta-ho tot.

C.6. Pensa com fer la multiplicació 475·36

C.7. Explica amb les teves paraules com multipliques amb notació polinòmica

C.8. Al 1550 va néixer a Edimburg John Napier, un noi que amb 16 anys va pujar a un vaixell per desembarcar al continent europeu i adquirir coneixement. No se sap ben bé on va estudiar, possiblement a la universitat de París o potser a la de Basilea, Ginebra, Jena o Marburg però va poder aprendre tot el que li va fer falta per inventar-se els logaritmes.
Abans d'això, i després de tornar a la seva Escòcia natal, va fer molts i molts càlculs. Entre d'altres va inventar-se mètodes per multiplicar ràpidament nombres grans. Evidentment NO TENIA CALCULADORA...
Agafa les «regletes de Napier» i multiplica:

a) 237·56
b) 47·23
c) 135·79
d) 2658·271

D. Els polinomis

Tal com hem vist, qualsevol nombre el podem escriure com

$$2304 = 2000 + 300 + 4 = 2\cdot1000 + 3\cdot100 + 4 = 2\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 4$$

Si considerem que x = 10 , aleshores podem dir que $2304 = 2x^3 + 3x^2 + 4$.
Quan enlloc de 10, tenim un número que no coneixem, «x», llavors $2x^3 + 3x^2 + 4$ és un **POLINOMI.**

Anomenarem **MONOMI** (mono vol dir un) qualsevol expressió algèbrica formada per la multiplicació d'un nombre real i d'una variable (o indeterminada) elevada a un exponent natural. El nombre real es diu **coeficient** i la indeterminada elevada a l'exponent es diu **part literal**. Anomenarem **grau** del monomi l'exponent de la variable.

D.1. Digues quines expressions són monomis i si ho són quin és el coeficient, la part literal i el grau:

a) $-2\,x^5$
b) $3.14\,t^2$
c) $\sqrt{2}\,y^3$
d) -1.33
e) $3\,x^{\frac{2}{3}}$
f) $-6\,\sqrt{x}$
g) $3\,x + 6\,x$

Un **POLINOMI** és la suma de monomis de diferents graus.

El grau d'un polinomi és el grau més gran entre els graus dels monomis que componen el polinomi.

El terme independent és el monomi de grau 0.

Exemple: $4\,x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ és un polinomi de grau 5 i el terme independent és -7

És convenient escriure els polinomis ordenats: Escriurem primer el monomi de grau més gran, fins arribar al monomi de grau més petit.

D.2. Ordena els següents polinomis i digues el seu grau:

a) $3\,x^2 - 4\,x^3 + 2 - 57\,x$
b) $-3\,t^6 + 5\,t - 9\,t^3$

D.3. Respon les següents qüestions:

a) Quin és el nombre màxim de coeficients que pot tenir un polinomi de grau 4? Raoneu la resposta i poseu-ne un exemple.

b) Pot haver-hi monomis de grau 2? Per què? Poseu-ne un exemple.

c) Escriviu un polinomi de grau 3 de variable z, amb terme independent 5 i que no tingui el monomi de grau 2.

Un polinomi és un concepte més general que un nombre perquè els coeficients poden ser positius i negatius, i més grans que 9 i la «x» no té perquè valer 10.
Observa, per altra banda la gran importància dels zeros en mig d'un nombre. Oblidar un d'aquests zeros implica escriure un nombre totalment diferent.

E. Operacions amb polinomis

Per **sumar polinomis** ho farem com si suméssim amb l'àbac però amb la diferència que els coeficients poden ser qualsevol número (enlloc de ser un número entre zero i nou)

Exemple: sumem el polinomi $12\,x^4 + 4\,x^2 - 17\,x + 4$ amb el polinomi $2\,x^4 + 3\,x^3 - 5\,x^2 + 3$

$$\begin{array}{rrrrr} 12\,x^4 & +0x^3 & +4\,x^2 & -17\,x & +4 \\ 2\,x^4 & +3\,x^3 & -5\,x^2 & +0\,x & +3 \\ \hline 14\,x^4 & +3\,x^3 & -x^2 & -17\,x & +7 \end{array}$$

E.1. Suma els següents polinomis:

a) $(9\,x^5 - 3\,x^3 + x^2 + 6\,x - 2) + (-x^5 - 3\,x^4 + 8\,x^2 + x - 3)$
b) $(13\,y^3 + 1) + (12\,y^2 + y - 11)$
c) $(x^3 - 12\,x^2 + x - 7) + (x^2 - 8\,x + 13)$
d) $(2\,a^5 - 7\,a^3 + a^2 + 15) + (-3\,a^5 + 7\,a^3 + a^2 + a - 13)$

E.2. Observa què ha passat amb els graus dels polinomis de l'exercici anterior i respon:

Apartat	Grau del 1r polinomi	Grau del 2n polinomi	Grau del resultat

Escriviu la relació entre els graus dels polinomis que sumem i el grau del polinomi resultant

E.3. Calcula p(x) + q(x) si $p(x) = x^3 - 4x + 21$ i $q(x) = 10x^4 + 3x^2$

Per **restar polinomis** ho farem com si suméssim però primer haurem de canviar el signe de tots els monomis del polinomi que restem.

Exemple: $(12\,x^4 + 4\,x^2 - 17\,x + 4) - (2\,x^4 + 3\,x^3 - 5\,x^2 + 3)$

$$\begin{array}{rrrrr} 12\,x^4 & +0x^3 & +4x^2 & -17\,x & +4 \\ \mathbf{-2\,x^4} & \mathbf{-3\,x^3} & \mathbf{+5x^2} & \mathbf{+0x} & \mathbf{-3} \\ \hline 10\,x^4 & -3\,x^3 & +9x^2 & -17\,x & +1 \end{array}$$

E.4. Resta els següents polinomis

a) $(9\,x^5 - 3\,x^3 + 2\,x^2 + 6\,x - 2) - (-11\,x^5 - 3\,x^4 + 8\,x^2 + 5\,x - 3)$
b) $(13\,y^3 + 7) - (12\,y^2 + 9\,y - 11)$
c) $(6\,x^3 - 12\,x^2 + 8\,x - 7) - (3\,x^2 - 8\,x + 13)$
d) $(2\,a^5 - 7\,a^3 + a^2 + 15) - (-3\,a^5 + 7\,a^3 + a^2 + a - 13)$

E.5. Si tenim tres polinomis $P(x) = 16\,x^3 - 32\,x^2 + 2\,x - 15$, $Q(x) = 23\,x^4 + 5\,x^2 - 2\,x + 7$ i $R(x) = -5\,x^4 + 3\,x^3 + x - 5$, calcula:

a) P(x) + Q(x)   b) R(x) - P(x)

c) R(x) - (Q(x) + P(x)) d) R(x) - Q(x) + P(x)

E.6. Anem a descobrir com multiplicar polinomis:

a) multiplica 30 000 · 200 000

b) escriu la multiplicació anterior amb notació polinòmica i calcula-la

c) multiplica: $5x^3 \cdot 3x^4$

d) explica com s'han de multiplica dos monomis

e) completa amb llenguatge simbòlic $ax^n \cdot bx^m =$

E.7. Calcula els següents productes de monomis:

a) $4\,x^5 \cdot 3\,x^4$

b) $(-5\,x) \cdot 3\,x^2$

c) $(-3\,t^2) \cdot (-5)$

d) $3{,}25x^3 \cdot 4{,}23x^2$

e) $\frac{3}{4}\,x^2 \cdot 6{,}29$

E.8. Fes les següents multiplicacions i pensa com es multipliquen els polinomis:

a) $(4\,x^3 + x^2 - 2) \cdot 7\,x^4$

b) $(-3\,x^3 + x^2 - 2) \cdot (-\,x^2)$

c) $(4\,x^2 + 3x - 2) \cdot x$

d) $(4\,t^3 - t^2 - 2) \cdot (-6\,t)$

E.9. Observa l'exemple de multiplicació de polinomis: $(3\,x^3 + 4\,x^2 + x + 2) \cdot (3\,x - 2)$

	$3\,x^3$	$+ 4\,x^2$	$+ x$	$+ 2$
			$3\,x$	$- 2$
	$- 6\,x^3$	$- 8\,x^2$	$- 2\,x$	$- 4$
$9\,x^4$	$+ 12\,x^3$	$+ 3\,x^2$	$+ 6\,x$	
$9\,x^4$	$+ 6\,x^3$	$- 5\,x^2$	$+ 4\,x$	$- 4$

Resultat: $(3\,x + 4\,x^2 + x + 2) \cdot (3\,x - 2) = 9\,x^4 + 6\,x^3 - 5\,x^2 + 4\,x - 4$

Explica amb les teves paraules com es fa la multiplicació de polinomis,

E.10. Fes les següents multiplicacions:

a) $(x + 1) \cdot (x + 3)$

b) $(x + 1) \cdot (x - 1)$

c) $(3\,x - 2) \cdot (2\,x + 3)$

d) $(x + 5)^2$

e) $(2\,x^3 + 4\,x - 2) \cdot (x^3 - 4)$

E.11. Digues quines són certes. I en aquelles que siguin falses indica on és l'error.

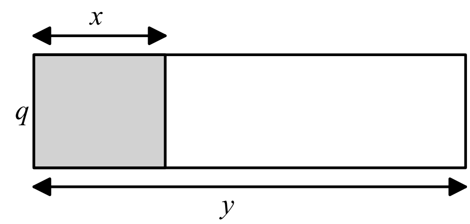
a) $x^4 \cdot x^3 = x^{12}$

b) $(x^2 + 5)^2 = x^4 + 25$

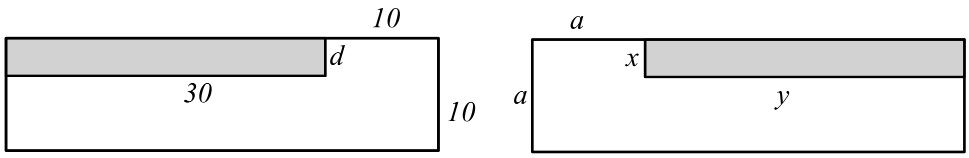
c) $3 \cdot (x^4 \cdot x^3) = 9\,x^7$

E.12. Trobeu l'**àrea** de les **zones NO ombrejades** que apareixen a les figures següents:

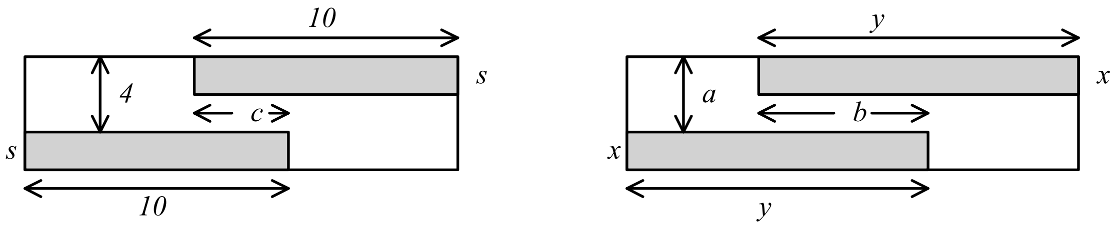
a)



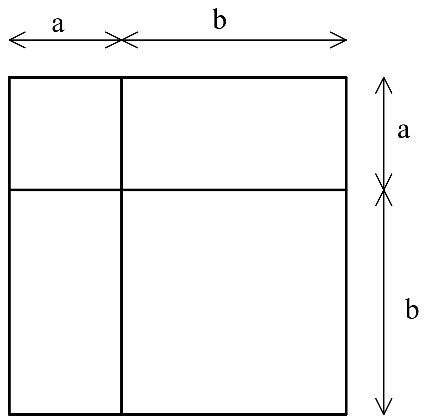
b)



c)

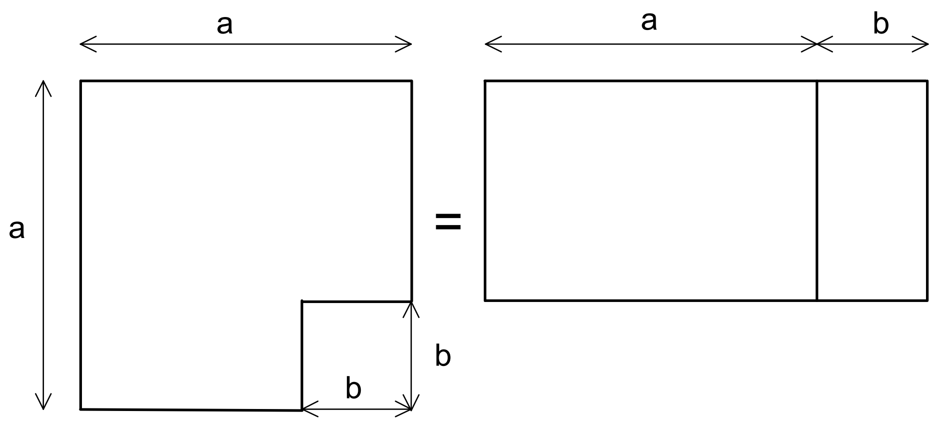


E.13. Expressa l'àrea del quadrat de costat a + b en funció de les àrees de les quatre figures que conté:

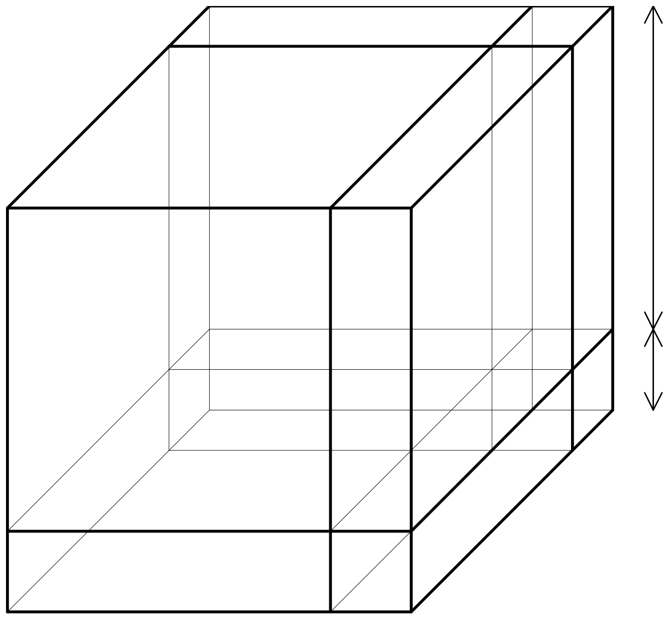


$(a + b)^2 =$

E.14. Explica i escriu les dues equivalències de les dues àrees següents:



E.15. Troba gràficament a què és igual $(a + b)^3$.



E.16. De forma semblant al producte de polinomis, multiplicarem expressions algebraiques i demostrarem **identitats notables**. Aquestes identitats són molt útils per fer càlculs. Heu de tenir en compte que les lletres a, b i c poden ser qualsevol expressió.

a) Exemple: Factor comú: $a\,(b + c) = a\,b + a\,c$
b) Quadrat d'una suma: $(a + b)^2$
c) Quadrat d'una diferència: $(a - b)^2$
d) Suma per diferència: $(a + b) \cdot (a - b)$
e) Cub d'una suma: $(a + b)^3$
f) Cub d'una diferència: $(a - b)^3$

E.17. Calcula: (observa que quan no hi ha «punt» entre dos parèntesis també vol dir multiplicar)

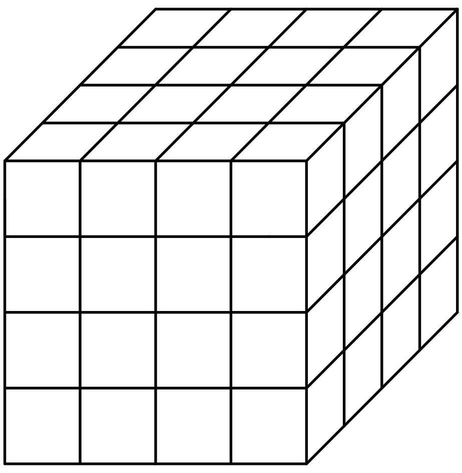
a) $(x + 2)^2$
b) $(x - 3)^2$
c) $(x + 2)(x - 2)$
d) $(x + 3)^3$
e) $(2x - 3)^2$
f) $(4x + 5)(4x - 5)$
g) $4x^2(x^2 + 3x)$
h) $2x(x - 3)$
i) $(3x^2 + 3)^2$

E.18.

El cub de la figura següent té 64 cubs petits. Pintem les sis cares del cub gran i volem saber quants cubs petits tenen pintades:

a) cap cara

b) una cara



c) dues cares

d) tres cares

E.19. Repetiu el problema anterior canviant els 4 cubs petits que té cada aresta per un nombre n qualsevol.

E.20. Quin nombre cal afegir a cadascun dels polinomis següents per formar un quadrat perfecte:

a) $x^2 + 2x + ...$
b) $x^2 - 2x + ...$
c) $x^2 - 6x + ...$
d) $x^2 + 5x + ...$
e) $x^2 + 10x + 9 + ...$

E.21. Troba si són identitats notables i en cas afirmatiu, escriu-les.

a) $x^2 + 4x + 4 =$
b) x^2 _ $2x + 1 =$
c) $x^2 - 4 =$
d) $x^2 - 6x + 9 =$
e) $x^2 + 10x + 25 =$
f) $x^2 + 12x + 36 =$
g) $x^2 + 4x + 25 =$
h) $x^2 - 9 =$
i) $x^2 - 14x + 49 =$
j) $x^2 + 20x + 100 =$
k) $x^2 - 36 =$
l) $4x^2 - 12x + 9 =$
m) $9x^2 + 12x + 4 =$
n) $25x^2 + 50x + 25 =$
o) $x^2 - 25 =$
p) $x^2 + 4x + 4 =$
q) $x^4 - 4x^2 =$
r) $4x^2 + 4x + 1 =$
s) $x^2 - 12x + 9 =$
t) $x^2 - 49 =$
u) $x^2 + 4x - 4 =$
v) $x^2 + 16x + 64 =$
w) $4x^2 - 36x + 81 =$
x) $x^2 - 1 =$
y) $9x^2 - 4 =$
z) $36x^2 + 48x + 4 =$

E.22. Ara només falta dividir polinomi.

a) Fes la divisió dels nombres següents $\dfrac{60000000}{3000} =$

b) Fes la divisió anterior amb notació polinòmica.

c) Divideix $\dfrac{12\,x^8}{3\,x^6} =$

d) Explica com s'han de dividir dos monomis

e) Completa amb llenguatge simbòlic, amb $m \geq n$ $\dfrac{ax^m}{ax^n} =$

E.23. Calcula:

a) $(4\,x^6) : (x^2)$

b) $(5\,x^3) : (2\,x^2)$

c) $(9\,x^5) : (x^3)$

d) $(5\,x^4) : (5\,x^4)$

e) $(a\,x^m) : (b\,x^2)$ com ha de ser **m** per poder trobar el quocient ?

E.24. Observa les dos divisions següents, explica quina diferència hi detectes:

$$\begin{array}{r|l} 497 & 12 \\ \cline{2-2} 017 & 41 \\ 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 497 & 12 \\ \cline{2-2} -\ 48 & 41 \\ \cline{1-1} 017 & \\ -\ 12 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

E.25. Observa el següent exemple $A(x) = 5\,x^4 + 6\,x^3 + 2\,x^2 - 4\,x + 2$ i $B(x) = x^3 - 2\,x + 3$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 5\,x^4 & +6\,x^3 & +2\,x^2 & -4\,x & +2 & x^3 - 2\,x + 3 \\ \cline{6-6} -5\,x^4 & & +10\,x^2 & -15\,x & & 5\,x + 6 \\ \cline{1-5} & 6\,x^3 & +12\,x^2 & -19\,x & +2 & \\ & -6\,x^3 & & 12\,x & -18 & \\ \cline{2-5} & & 12\,x^2 & -7\,x & -16 & \end{array}$$

El quocient és $q(x) = 5\,x + 6$ i el residu és $r(x) = 12\,x^2 - 7\,x - 16$. Observa que el grau del residu és més petit que el grau del divisor i no podem seguir la divisió.

Escriu la «comprovació de la divisió» $A(x) = B(x) \cdot q(x) + r(x)$

E.26. Calculeu les divisions següents:

a) $(x^5 + 5\,x^4 - 6\,x^2 - 4) : (x^3 + 3\,x^2 - 1)$

b) $(-\,x^5 + 12\,x^4 - 8\,x^3 + x^2) : (x^4 - 2\,x^2 + x)$

E.27. Trobeu un polinomi tal que, en ser dividit per $x^2 + 1$ doni de quocient $2\,x^2 + x - 4$ i de residu $3\,x - 4$

E.28. MÈTODE DE RUFFINI: només quan dividim entre (x - a)
Volem fer la següent divisió: $(x^5 - 2x^4 - 5x^2 - 17x + 8) : (x - 3)$

Ara es calcula el quocient i el residu de la divisió anterior amb un altre procediment:

		1	-2	0	-5	-17	8	Polinomi en notació posicional
important *	3		3	3	9	12	-15	Nombres que van sortint
		1	1	3	4	-5	7	**Residu**
		Quocient en notació posicional						

*: aquí posem el número que caldria posar en comptes de l'x per a que el divisor sigui zero.
En aquest cas $3-3 = 0 \rightarrow x = 3$

Has descobert quin és el quocient i el residu?

E.29. Fes la divisió següent: $(x^6 - x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 6) : (x - 2)$ amb el mètode de Ruffini.

E.30. Si vols practicar més Ruffini:

a) $(x^6 - 3x^5 + 9x^3 - x^2 + 1) : (x - 1)$
b) $(2x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 1) : (x - 3)$
c) $(2x^4 - 3x^3 + 6x + 2) : (x + 3)$. Observeu que $(-3) + 3 = 0$ per tant cal aplicar Ruffini amb $x = -3$

F. Valor numèric d'un polinomi

Si substituïm en un polinomi la variable per un nombre i calculem el resultat obtindrem un altre nombre. Per exemple si a $P(x) = x^3 - 4x^2 + 7$ substituïm la x per 2, ho indiquem per P(2), obtenim: $P(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 7 = 8 - 16 + 7 = -1$

Aleshores diem que -1 és **el valor numèric del polinomi** P(x) per x = 2.

Si en un polinomi P(x) substituïm la x per un nombre a, el resultat obtingut és el valor numèric del polinomi quan x pren aquest valor i ho representem per P(a).

F.1. Calculeu el valor numèric dels polinomis següents :

a) $P(x) = 2x^4 - x^3 + 9$ per x = 2, P(2) =
b) $Q(x) = -3x^3$ per x = -1
c) $S(x) = 5$ per x = 4
d) $R(x) = x^2 - 4$ per x = 2
e) $S(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ per x = 1
f) $T(x) = 22x^7 - 4x^5 - 3x^3 + 3$ per x = 0
g) $U(x) = 6x^2 - 3x + 1$ per x = -2
h) $V(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 8$ per x = 2

F.2. Escriu dos polinomis, un de grau 1 i un altre de grau dos, de manera que el seu valor numèric per x = -3 sigui 1.

Quan el valor numèric d'un polinomi P(x) per x = a és igual a 0, P(a) = 0, diem que **'a' és una arrel (o un zero)** del polinomi P(x).

Per exemple: 3 és una arrel del polinomi $P(x) = x^2 - 5x + 6$ perquè P(3) = 0.
1 no és una arrel del polinomi $P(x) = x^2 - 5x + 6$ perquè P(1) = 2

F.3. La Marta diu que x= - 1 és una arrel del polinomi $P(x) = x^4 + 3x^2 - 6x^2 + 2$. L'Eva diu que x = - 1 no és una arrel d'aquest polinomi. L'Eva diu que l'arrel és x = 1. Qui té raó?

F.4. Troba una arrel, provant amb nombres senzills, de cadascun dels polinomis següents:

a) $P(x) = x + 3$
b) $Q(x) = x^2 - 4$
c) $R(x) = 5x^2 - 5$
d) $S(x) = x^2 - 3x + 2$
e) $T(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

F.5. Hi ha alguna relació entre les arrels d'un polinomi i resoldre equacions? Quina?

F.6. Respon les següents preguntes i treu-ne conclusions:

a) Quin és el residu de la divisió $(x^3 - 2x + 1) : (x-2)$?
b) Quin és el valor numèric de $P(x) = x^3 - 2x + 1$ per x = 2 ?
c) Creus que la coincidència entre els resultats als dos apartats anteriors és casualitat? Per què ?

F.7. Demostra que el valor numèric d'un polinomi P(x) per x = a coincideix amb el residu de la divisió del polinomi P(x) per (x – a). (**TEOREMA DEL RESIDU**)

F.8. Busca alguna arrel del polinomi $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ provant amb Ruffini.

Aquesta tècnica té l'inconvenient que temptejar a cegues pot ser frustrant. Per facilitar i acotar el tempteig cal fer-ho sols amb **els divisors del terme independent (amb positiu i negatiu).**

> Per exemple, el polinomi anterior $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ provaríem sols amb 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12 (observa que tots ells divideixen al 12)

Si volem buscar més d'una arrel es pot continuar intentant buscar un residu zero amb Ruffini a partir del quocient de la divisió anterior.

Exemple: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

	1	-6	+11	**-6**
1		1	-5	**+6**
	1	-5	+6	**0**
2		2	-6	
	1	-3	0	
3		3		
	1	**0**		

En aquest cas x = 1 , x = 2 i x = 3 són les tres arrels del polinomi.

F.9. Busca les arrels del polinomi $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

En el polinomi anterior es repeteix l'arrel x = 2. En aquest cas diem que x = 2 és una <u>ARREL DOBLE</u>

F.10. Calcula, temptejant amb Ruffini o bé substituint, les arrels dels següents polinomis:

a) $P(x) = x^2 - 6x + 8$
b) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
c) $P(x) = x^2 - 4$
d) $P(x) = 2x^2 + 12x + 10$

F.11. Intenta trobar les arrels en els següents polinomis temptejant per Ruffini

a) $P(x) = 6x^2 - 5x + 1$
b) $Q(x) = x^2 + x + 1$
c) quines dificultats trobes?

El mètode de Ruffini no sempre permet trobar les arrels dels polinomis. En aquest cas pot ser que les arrels no siguin enteres o que el polinomi no tingui arrels. Com a mètode alternatiu per trobar arrels podem intentar resoldre l'equació de 2n grau P(x) = 0.

G. Factorització i recerca general d'arrels

G.1. Calcula mentalment les arrels dels polinomis següents:

a) $P(x) = x-1$
b) $Q(x) = x+2$
c) $R(x) = x\cdot(x+2)$
d) $S(x) = (x-3)(x+2)(x-5)(x-8)$
e) $T(x) = x^3(x-2)^2(x+3)(x-6)$

G.2. Calcula les arrels dels polinomis següents:

a) $P(x) = (x+1)(x-2)$
b) $Q(x) = x^2 - x - 2$
c) $P(x) = Q(x)$? Explica el perquè.

<u>Esquema general de factorització i recerca d'arrels</u>

Ha quedat clar que si tenim un polinomi factoritzat aleshores sabem quines són les seves arrels, i si sabem les arrels podem escriure fàcilment el polinomi factoritzat. Podem, ara, ajuntar totes les tècniques que hem desenvolupat tant per factoritzar com per trobar arrels i utilitzar-les indistintament per les dues tasques.

Si volem factoritzar i buscar arrels d'un polinomi cal que seguim aquest esquema d'actuació:

1r Si el polinomi no té terme independent, aleshores traurem factor comú la x elevada al màxim exponent possible.
2n Intentem descompondre el polinomi desfent algun producte notable " a ull".

3r Intentem descompondre-ho temptejant amb Ruffini.

4t Aplicar, si cal, la fórmula de l'equació de 2n grau.

5è Comprovar si el polinomi factoritzat i l'original són del mateix grau i tenen el mateix coeficient del monomi de grau superior.

G.3. Descompon amb factors i dóna les arrels dels següents polinomis:

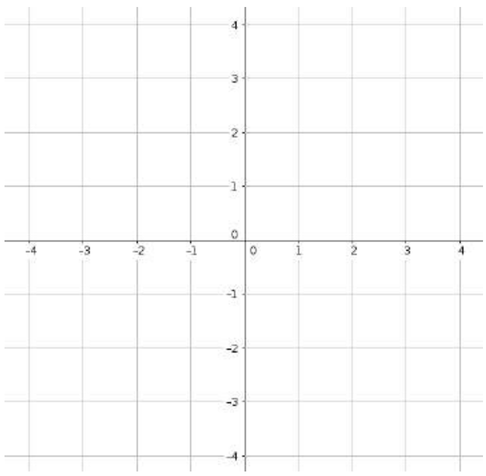
a) $P(x) = x^3 - 13x + 12$
b) $Q(x) = 2x^3 - 6x^2 - 8x + 24$
c) $R(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$
d) $S(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 8x$
e) $T(x) = 15x^6 - 49x^5 + 8x^4 + 12x^3$
f)

G.4. Utilitzant el GeoGebra dibuixa els següents polinomis. Escriu clarament quines són les arrels i digues si son arrels simples, dobles,...

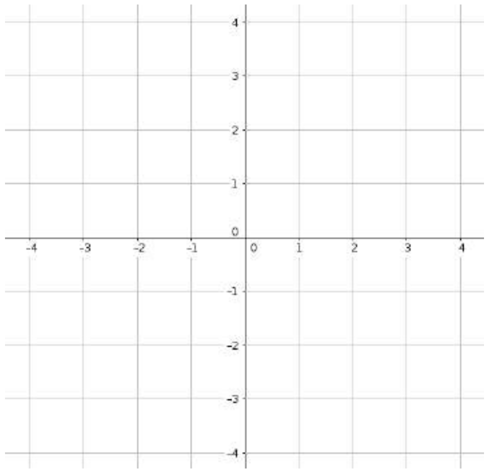
$f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$

Les arrels són (recorda especificar si és simple o doble):

x = x =

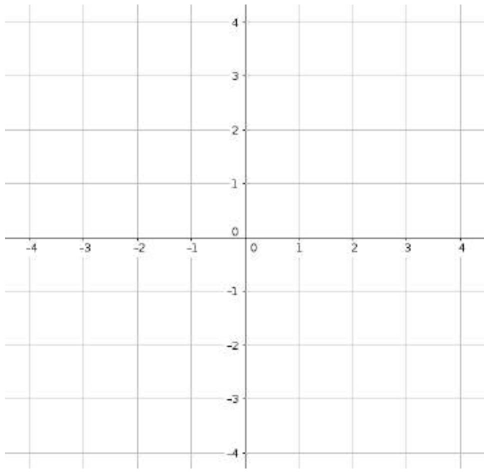


b) $g(x)=2x^3-2x=2x(x-1)(x+1)$



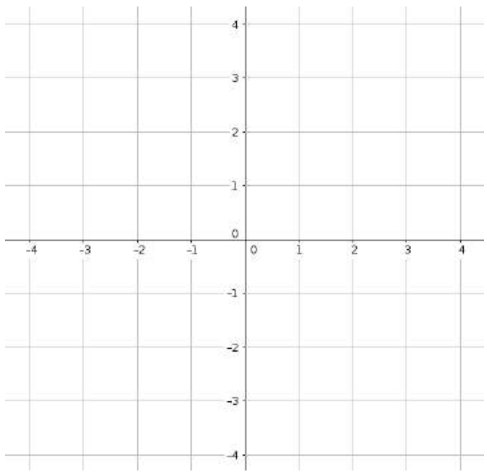
Les arrels són :
x =
x =
x =

c) $f(x)=x^3+x^2-x-1=(x-1)(x+1)^2$



Les arrels són (recorda especificar si és simple o doble):
x =
x =

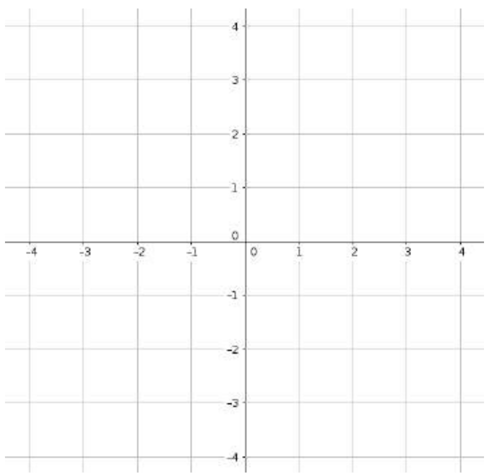
d) $f(x)=3x^4-3x=3x^3(x-1)$



Les arrels són (recorda especificar si és simple o doble):
x =

x =

e) $g(x)=-x^3+x=-x(x-1)(x+1)$



Les arrels són :
x =
x =
x =

H. Les funcions polinòmiques

H.1. Dels següents polinomis :

- Busca les arrels.
- Escriu la descomposició factorial.
- Fes un esbós del gràfic.

$f(x) = x^2 - 3x - 4$

$g(x) = -x^2 + 5x$

$h(x) = -4x + 10$

$i(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5x + 3$

$j(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

$k(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

$l(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

H.2. Com trobes els punts de tall amb l'eix X?

H.3. Com trobes els punts de tall amb l'eix Y?

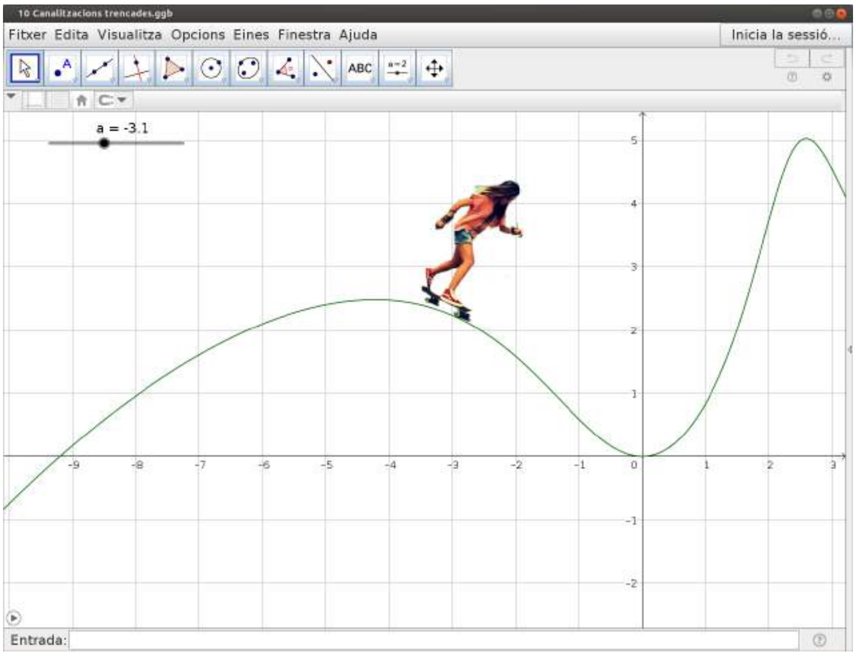
H.4. Els polinomis de grau 1 són ______________

H.5. Els polinomis de grau 2 són ______________

H.6. Pots dir com són els polinomis de grau 3? I els de grau 4? I.....

I. Dissenyem la teva pista d'Skate

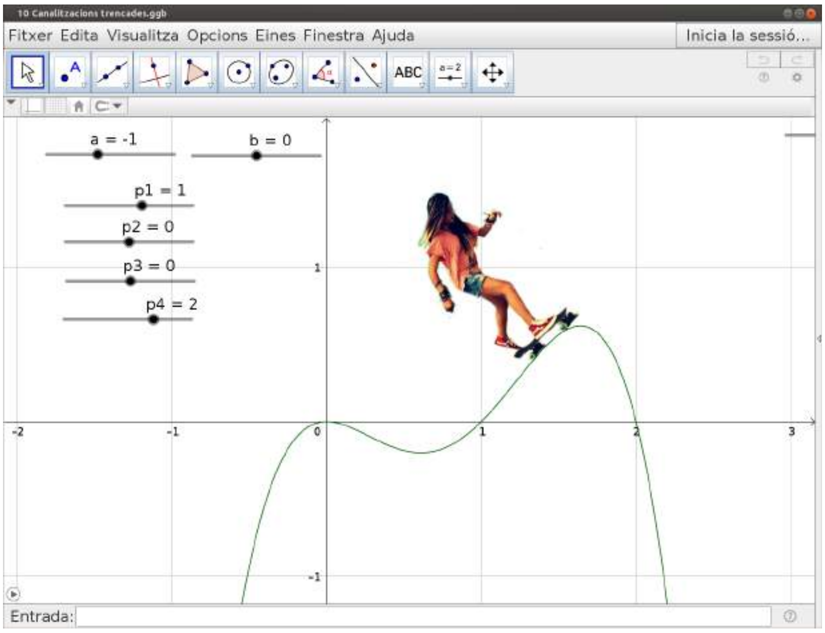
Ara ja saps quins són els secrets que amaga un polinomi. En la seva essència tenim sempre una forma sinuosa, es adir una pista d'skate amagada.



Ara et proposem un repte emocionant: dissenya i construeix la teva pròpia pista d'skate. Per a fer-ho utilitzarem el Geogebra amb paràmetres. Ja hauràs comprovat que un polinomi es pot modelar a partir de modificar els paràmetres següents:

$$P(x)=a(x-p_1)(x-p_2)(x-p_3)(x-p_4)\ldots$$

Els paràmetres p_i ens donen punts de tall a l'eix X que van modulant les ones del polinomi, i el paràmetre a ens permet encongir o allargar verticalment la nostra pista d'skate.



I.1. INSTRUCCIONS:

Per fer la pista d'skate calda elaborar un informe en el que s'expliqui tot el procès. Us proposem les següents instruccions:

- Utilitzeu, **com a màxim**, dues arrels no enteres (es a dir amb decimals), la resta d'arrels han de ser sense decimals.
- Feu primer una aproximació de disseny de pista de manera purament teòrica, es a dir a partir del polinomi descompost en factors. Feu un dibuix aproximat (cal que feu aquest dibuix a l'informe)
- Plasmeu aquest polinomi al GeoGebra, modifiqueu-lo per modelar-lo millor (sobre tot el paràmetre *a*), Si voleu fer alguna altra modificació consulteu amb el professorat...
- Farem la pista a escala, de manera que el patinador sigui un patinador nan que tingui les cames igual que els vostres dits índex i mitger.
- Imprimiu el polinomi a l'escala que heu decidit
- Retalleu el polinomi amb cartrons (al menys 2) i enganxeu a sobre del polinomi de cartró «goma-eva».
- Feu una foto vostra drets i imprimiu-la a la mateixa escala (es a dir les cames han de coincidir amb la longitud dels vostres dits índex i mitger)
- Compreu un skate petit dels que venen a les botigues de baix preu i que tenen, justament aquesta mida.
- Feu un petit vídeo patinant amb la vostra pista d'Skate.

I.2. Quan tingueu feta la pista caldrà presentar-la als companys. Per presentar-la la portareu amagada en una bossa opaca, explicareu una mica quines són les característiques de la vostra pista d'skate i mostreu el polinomi desenvolupat. Tots els companys hauran de descobrir la forma de la pista descomponent el polinomi, i representant-la gràficament Quan tothom tingui ja la pista dibuixada, l'autor la mostrarà.