

La rebel·lió de Vincenzo Galilei: Quan la música formava part de la matemàtica

Sessió 5.
16 de febrer de 2019

Presentació

La música ha estat un tret identitari ancestral de l'ésser humà que s'ha anat desenvolupant al llarg de totes les civilitzacions. La creació, l'evolució i l'afinació dels diferents instruments musicals s'ha convertit en una necessitat humana que ha generat un problema matemàtic irresoluble i obert. Els pitagòrics ja van intentar resoldre aquest problema i valorant la seva importància van dividir els coneixements exactes o matemàtics en quatre (quadríviem): aritmètica, música, geometria i astronomia.

Vincenzo Galilei, pare de Galileu, era matemàtic especialitzat en música i va ensenyar dues coses al seu fill: les matemàtiques (és a dir a tocar el llaüt) i a rebel·lar-se contra els cànons establerts fins al moment. Va fer recerca matemàtica sobre la música i va defensar un nou sistema d'afinació que trencava amb la tradició pitagòrica.

L'escala musical no és única, podem trobar arguments per utilitzar diverses distribucions sonores. Qualsevol d'aquests arguments té una base matemàtica i podem, fins i tot, intentar desenvolupar una nova escala musical, plantejant-ho com un problema obert.

Objectius de la sessió

- Entendre el problema històric de l'afinació dels instruments musicals.
- Analitzar les diferents solucions que s'han plantejat al llarg dels anys.
- Buscar noves solucions i experimentar les matemàtiques en el context de la creativitat.

Professorat

Santi Vilches Latorre svilches@xtec.cat

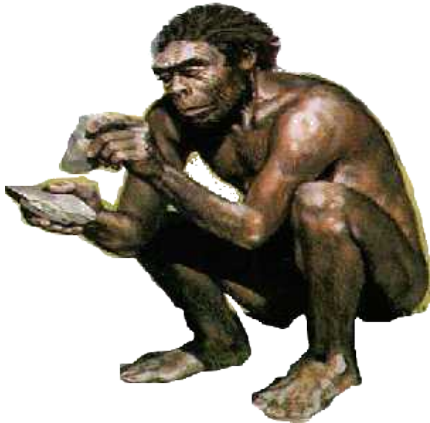
Coordinador Grup Fotografia Matemàtica ABEAM. INS Vilamajor

Maite Gorriz Farré mgorriz@xtec.cat

Inspecció d'Educació a la Catalunya Central

El problema de l'afinació

La música ha estat un tret identitari ancestral de l'ésser humà que s'ha anat desenvolupant al llarg de totes les civilitzacions. No és fàcil saber com ni quan l'home primitiu va començar a crear el llenguatge musical però tots podem imaginar uns inicis en que una mare intenta calmar un nadó amb un petit càntic seguint el ritme de les pulsacions del cor o un grup d'homínids intentant marcar un ritme per caminar i sobreviure. També podem imaginar un home primitiu descobrint com sona la corda tensada d'un arc en recolzar-la sobre un tronc buit, o com sona una pell que s'ha assecat sobre una gerra de fang. Fins i tot com pita un os quan bufem el seu interior per netejar-lo.



Totes les civilitzacions han anat evolucionant a mesura que anaven desenvolupant els diferents llenguatges, la parla, les representacions gràfiques, l'escriptura i també la música. Aquesta evolució ha anat lligada a la capacitat de millora tècnica i totes les civilitzacions humanes s'han trobat, en un moment donat, davant d'un problema: si volem construir un instrument, com per exemple, una arpa i volem que toqui junt a un altre instrument, per exemple una flauta, com construïrem (afinarem) els instruments per tal que el so superposat dels dos instruments resulti agradable a la oïda humana?

Aquest es un problema de caire matemàtic totalment obert que permet multitud de solucions. De fet cada civilització ha donat la seva afinació pròpia i característica. Tots reconeixem una música oriental o àrab tant sols per l'afinació diferenciada dels seus instruments. Aquest es el problema que ens plantejarem. Es possible trobar una afinació pròpia dels Bojos per les Mates?

Conceptes i vocabulari

Abans de començar, però, necessitem tenir clars una sèrie de conceptes i de vocabulari necessari per tal d'entendre bé tot el què farem.

El **so** és un agent físic que impressiona el sentit de la oïda.

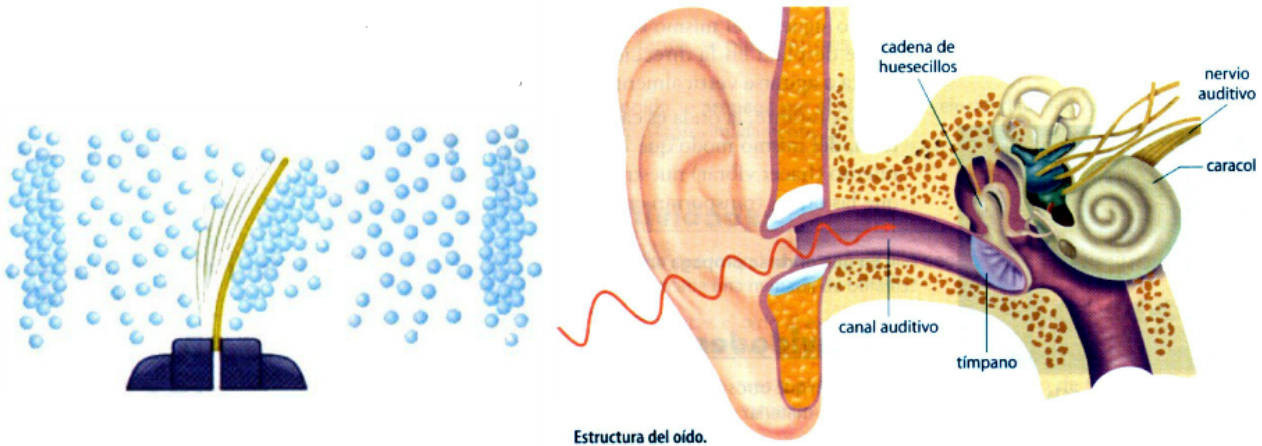
El so es produeix per **vibracions** dels cossos. Aquesta vibració transmesa per un mitjà natural en forma de **moviment ondulatori** penetra pel pavelló auditiu i fa vibrar la membrana del timpà.

Per tal d'obtenir so es necessari que un cos material realitzi un moviment vibratori, per exemple una corda tensada oscil·lant. Aquestes oscil·lacions o vibracions s'han de transmetre per un mitjà sòlid, líquid o gasos, (normalment l'aire) fins arribar a l'oïda.

Si la quantitat d'oscil·lacions per unitat de temps és sempre la mateixa direm que aquest moviment oscil·latori és **periòdic** i anomenarem **freqüència** a la quantitat d'oscil·lacions (**cicles**) per segon.

La unitat de mesura de la freqüència serien els cicles per segon (c/s) i s'anomenen **Hertz (Hz)** en honor a Heinrich Hertz (1857 - 1894).

Un exemple senzill és el d'una barra metàl·lica clavada sobre un suport. Si colpegem la barra metàl·lica, aquesta comença a vibrar amb una freqüència (oscil·lacions per segon) determinada i fixa. Aquestes oscil·lacions de la barra mouen les partícules d'aire que hi ha al seu voltant, aquest moviment de partícules es va contagiant (igual que una ona d'aigua quan tirem una pedra a un llac) fins que arriba al nostre timpà. El nervi auditiu transmet la informació al nostre cervell que percep una **nota musical** o un **to**.



Un fenomen natural del so

Si una oïda humana percep el so produït per una font emissora amb una freqüència fixa, per exemple de 440 Hz i simultàniament percep un so amb el **dobte** de la freqüència (en aquest cas 880Hz) o la **meitat** (220Hz) el cervell humà interpreta que està sentint **el mateix to** i fins i tot no és capaç de percebre que es tracta de dos tons diferents si no els escolta per separat.

Per tant, si decidim anomenar per exemple A a un to produït per una freqüència determinada, haurém de anomenar també A al to produït per la freqüència duplicada o per la freqüència meitat.

$$\text{Si } A = f \quad \text{aleshores} \quad A = 2f, A = 4f, A = 8f, \dots \quad \text{també } A = \frac{1}{2}f, \frac{1}{4}f, \frac{1}{8}f \dots$$

Temperament

Tornem al problema original de l'evolució de la música i imaginem que volem definir una serie de freqüències per incorporar-les a un instrument musical per tal que pugui tocar simultàniament amb altres instruments.

Començaríem amb una corda que emet una freqüència determinada f , per exemple 440Hz i a continuació posaríem una altra corda amb una altra freqüència, i una tercera corda amb una altra freqüència i després d'unes quantes cordes arribarem a una corda amb una freqüència $2f$, en aquest exemple 880Hz. Com que la oïda humana percep aquesta nota igual que la original, a partir d'aquí haurém de seguir exactament el mateix criteri per tal d'anar «repetint» totes les notes fins la freqüència $4f$ i així successivament. Inversament, cap endarrere també podem incorporar noves cordes amb el mateix criteri invers fins arribar a $\frac{1}{2}f$...

La creació d'una escala musical consisteix, per tant en determinar quines freqüències sonores formen part d'una seqüència que va des d'una freqüència f fins a la freqüència $2f$ i quin és el criteri matemàtic que regeix aquesta sèrie numèrica.

Una serie de freqüències numèriques que va de f a $2f$ s'anomena **temperament**. Un cop decidit un temperament, els criteris que el generen s'haurà de repetir indefinidament per determinar la resta de freqüències sonores de $2f$ a $4f$, de $4f$ a $8f$,... (i també de manera inversa de f a $\frac{1}{2}f$, de $\frac{1}{2}f$ a $\frac{1}{4}f$,...).

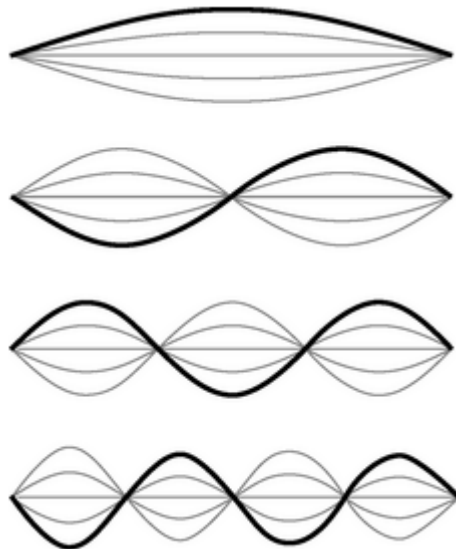
Els harmònics. Timbre i to

Si tensem una corda fins que faci 440 vibracions per segon i colpegem un tros de metall que també oscil·la a 440 vibracions per segon, per què percebem els dos sons d'una manera totalment diferent?

ACTIVITAT 1. Què són els harmònics?

- a) *Lliguem una corda de cotó a un extrem d'un aparell amb un motor que es mogui de manera constant, per exemple un batedor de braç. Tensem la corda i observem les vibracions de la corda. Les vibracions venen determinades per l'impuls del batedor i per tant obligarà a la corda a moure's d'una forma determinada, però la tensió que li donem també determina la seva forma de moure's.*

Observa què passa quan modifiquen la tensió de la corda



- b) *Es fàcil fer vibrar les cordes de longitud L d'un instrument musical d'una manera similar a l'experiment anterior (per exemple una guitarra o un violoncel).*

Agafem un instrument i premem la corda polsant-la lleugerament a una distància de $\frac{L}{2}$,

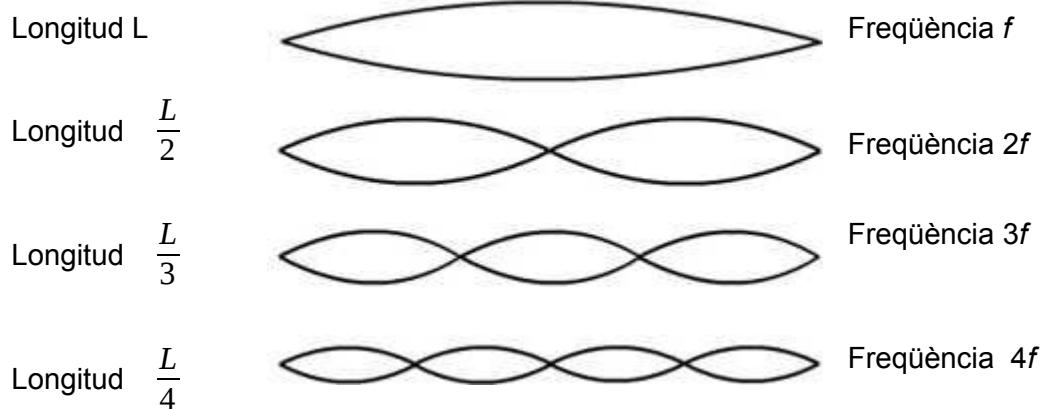
$\frac{L}{3}$ $\frac{L}{4}$ etc. Escolta el so.



c) Toquem una corda i parem-la. Escolta com les altres cordes sonen **per simpatia**.

Observem el fenomen de la «simpatia».

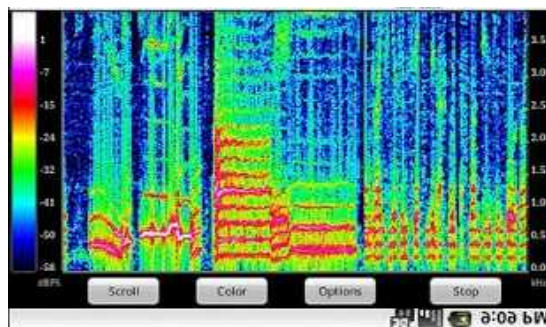
Els diferents sons que emet la corda s'anomenen **harmònics**. Les freqüències dels harmònics segueixen la següent relació



És a dir, les freqüències dels harmònics són els **múltiples** de la freqüència fonamental.

ACTIVITAT 2. Què és el timbre?

Obre l'App Spectral Audio Analyzer. i observa l'espectre quan s'emet una nota o **to** musical amb un instrument determinat. Repeteix l'experiment amb un altre instrument musical amb la mateixa nota o to. Quines són les diferències?



Quan un element vibra (una corda tensada, una llengüeta, una barra de ferro, ...) amb tota la seva longitud L , l'element vibra al mateix temps i simultàniament també amb la meitat de la seva longitud $\frac{L}{2}$, a terços $\frac{L}{3}$, a quarts $\frac{L}{4}$... produint freqüències múltiples de la primera, $2f$, $3f$, $4f$, ... superposant, de fet, totes les freqüències, és a dir, tots els seus harmònics. Cada instrument emet uns harmònics amb més intensitat que altres i fa que cada instrument tingui un **timbre** diferent. Aquest fet l'has pogut observar perfectament a l'activitat 2 en utilitzar *Spectral Audio Analyzer*.

Temperament harmònic

Per resoldre el problema del temperament la solució hauria de tenir obligatòriament uns requisits indispensables:

- *Totes les notes (freqüències) han d'estar entre f i $2f$, ja que l'oïda humana considera equivalents les notes $f \equiv 2f$. A partir de $2f$ únicament caldria repetir els criteris de generació de notes fins a $4f$ i així successivament.*
- *Si incorporem la freqüència f en un temperament no podem evitar que els seus harmònics $2f$, $3f$, $4f$, ... sonin. Per tant no seria una bona idea no incorporar aquestes notes ja que estaria sentint unes notes que no existeixen en el temperament emprat.*
- *Si volem incorporar una nota nova al temperament i aquesta nota no està entre f i $2f$ podem dividir o multiplicar aquesta freqüència per dos tantes vegades com vulguem. Així per exemple si volem incorporar $3f$ al temperament només cal considerar la nota $\frac{3}{2}f \equiv 3f$ amb $f < \frac{3}{2}f < 2f$*

ACTIVITAT 3. Temperament harmònic

- Busca un temperament seguint aquests criteris (utilitza des de f fins a $16f$).*
- Analitza si hi ha relació entre les notes consecutives, si es tracta d'una progressió i en aquest cas si es aritmètica o geomètrica*
- Podrem escoltar aquesta escala generada amb el programa Pure Data (per exemple amb $f = 264$ Hz). Escolteu aquest temperament i opineu sobre la seva viabilitat musical.*

Aquesta activitat es pot plantejar de manera anàloga a partir de la longitud de la corda (enlloc de les freqüències)

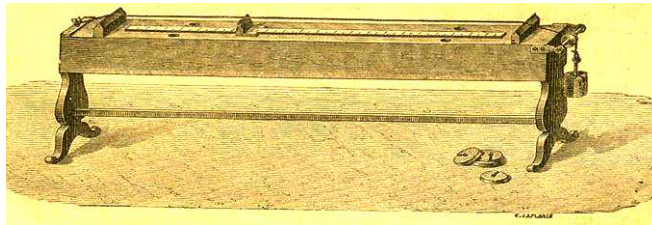
Pitàgores

A l'època Pitagòrica els coneixements matemàtics es dividien en quatre (**quadrivium**): aritmètica, **música**, geometria i astronomia. El problema de construir un temperament per tal d'afinar diferents instruments per tocar junts era un dels problemes matemàtics importants de l'època.

Els pitagòrics van estudiar aquest problema a fons, sempre des d'una perspectiva matemàtica i possiblement es van adonar de dos fets transcendents:

- El problema dels temperaments és un problema purament matemàtic
- El problema és totalment obert perquè la solució no és única ja que forma part de la creativitat humana.

Pitàgores va fer multitud d'experiments variant la tensió de les cordes amb diferents pesos, colpejant campanes de diferents mides, entre d'altres. Un dels instruments de recerca més important va ser el monocord, un instrument d'una sola corda tensada, la qual es podia variar de longitud.



ACTIVITAT 4. Temperament Pitagòric

Pitàgores es va adonar que un dels problemes més greus del temperament harmònic és que aconseguim els harmònics de la nota inicial f però no els harmònics de la resta de notes. La proposta de Pitàgores va ser buscar una escala alternativa en la què, disposem sempre del tercer harmònic (és a dir el primer harmònic no trivial) de totes i cada una de les notes.

- a) Construiu un nou temperament de 7 notes seguint el següents criteris
 - A partir d'una freqüència f afegiu el tercer harmònic $3f$, del qual també incorporarem el tercer harmònic $3(3f)$ i així successivament. Les notes que tindrà la nova escala seran: f , $3f$, 3^2f , 3^3f , 3^4f , 3^5f , 3^6f .
 - En qualsevol cas les notes han d'estar entre f i $2f$ per tant cal dividir les notes noves per potències de 2.
- b) Analitza si hi ha relació entre les notes consecutives, si es tracta d'una progressió i en aquest cas si es aritmètica o geomètrica
- c) Continueu amb 5 notes més 3^7f , 3^8f , 3^9f , $3^{10}f$, $3^{11}f$ i escriviu-les amb un color diferent.
- d) Analitzeu de nou si és o no progressió aritmètica o geomètrica.
- e) Podrem escoltar aquesta escala generada amb el programa Pure Data (per exemple amb $f = 352 \text{ Hz} = fa$). Escolteu aquest temperament i opineu sobre la seva viabilitat musical.
- f) Expliqueu amb detall quins avantatges i quins inconvenients pot tenir aquest temperament

Temperament Aristògenes-Zarlino

Pitàgores no va ser capaç de resoldre satisfactòriament el problema del temperament, i per tant el problema va quedar obert, donant peu a altres solucions alternatives. Una de elles va ser proposada per Aristògenes 350 anys abans de Crist. Giosefo Zarlino (1517-1590), mestre de capella de Sant Marc a Venècia, la va fer popular i es va utilitzar molt durant el Renaixement.

Vincenzo Galilei (1520-1591) va coincidir amb Zarlino i va qüestionar la seva teoria.

ACTIVITAT 5 *Temperament Aristògenes-Zarlino*

La proposta d'Aristògenes consisteix en utilitzar el tercer harmònic $3f$ i també el cinquè harmònic $5f$ de la nota principal o dominant. Després afegir successivament tercers harmònics de cada una d'aquestes notes: $f, 3f, 3^2f, 3^3f, 5f, 5 \cdot 3f, 5 \cdot 3^2f$,

- a) Genera aquest nou temperament.
- b) Aplica'l al valor $f = 352$ Hz (nota fa)
- c) Analitza les diferents raons que hi ha entre una nota i una altra. Reflexioneu la dificultat que hi ha en incorporar noves notes entre mig
- d) Podrem escoltar aquesta escala generada amb el programa Pure Data (per exemple amb $f = 352$ Hz = fa). Escolteu aquest temperament i opineu sobre la seva viabilitat musical

L'escala temperada

Fins el segle XVI era impensable considerar una escala musical en la qual no s'incorporessin els harmònics naturals. Vincenzo Galilei, el pare de Galileu, va trencar amb els cànons establerts i es va plantejar la possibilitat d'obrir el problema. Per què no ignorar les restriccions? Per què no «passar» dels harmònics? Aquest esperit rebel li va ocasionar molts problemes amb les autoritats intel·lectuals de l'època i aquest va ser un dels aprenentatges que va tenir Galileu del seu pare.

El problema més greu de les escales establertes fins aleshores era l'afinació d'instruments com el clave i la impossibilitat de fer transposicions d'una manera satisfactòria. (Una transposició consisteix en alterar la tonalitat d'una peça musical pujant o baixant alguns tons per tal d'adequar la música al registre d'un cantant.) Qualsevol transposició sonava lleugerament diferent que la peça original.

ACTIVITAT 6. *L'escala Temperada*

La solució que Vincenzo Galilei va defensar va ser proposada ja per Bartolomé Ramos de Pareja, (1440-1491) professor de teoria musical a la Universitat de Salamanca però la seva solució no va ser acceptada fins gairebé 200 anys després. La idea és simple. Només cal construir una progressió geomètrica de manera que amb 12 termes passem de f a $2f$.

- a) Construeix aquest temperament
- b) Aplica'l prenent com a nota principal el $f = 264$ Hz (nota do¹) i crea una escala sonora amb algun instrument o amb l'ordinador amb l'estructura següent: to-to-semitò-to-to-to-semitò.
- c) Comenta la viabilitat d'aquesta escala.

| | | | | | | | | | |
|------|----|-----|----|-----|----|------|----|-----|--|
| Do # | | re# | | fa# | | sol# | | la# | |
| | | | | | | | | | |
| do | re | mi | fa | sol | la | si | do | | |
| 264 | | | | | | | | | |

1 Habitualment aquesta escala es construeix a partir de la=440 Hz.

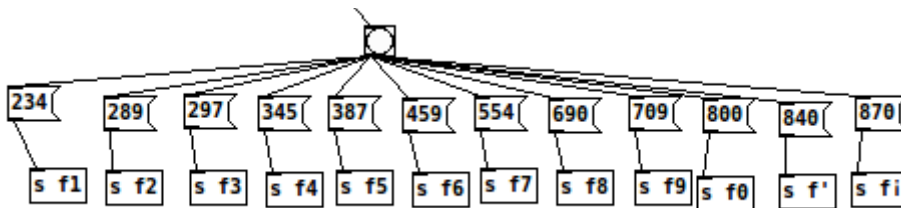
Bach va ser qui va popularitzar definitivament l'escala temperada creant una genial composició anomenada *El clave ben temperat* en la que compon música per al clavecí amb aquesta afinació. Una peça per a cada tonalitat. Escolteu-ne algun fragment.

ACTIVITAT 7

L'esperit de la família Galileu és la que ens inspira a l'hora de proposar aquesta activitat. Un esperit de llibertat i de creativitat dins del món de la matemàtica.

Trenquem totes les restriccions i triem-ne de noves. Feu una nova proposta d'una escala musical amb les criteris matemàtics que vulgueu. Feu-la sonar i exposeu-la als vostres companys.

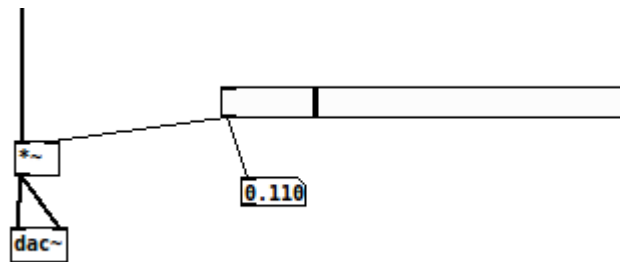
Per poder interpretar música amb l'escala que heu creat només cal que introduïu les freqüències que heu triat al següent fitxer de Pure Data que us podeu descarregar de <https://mat3.cat>



Per interpretar musica cal utilitzar les tecles amb números del teclat.



Cal però apujar el volum del PD movent a la dreta el cursor:



També podeu crear una composició utilitzant l'Audacity